

REGELUNGSTECHNIK

Best Of Elektronik

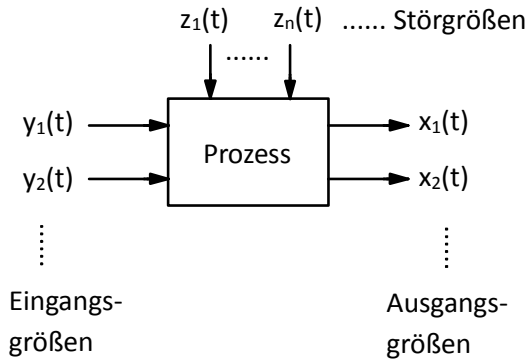
www.kurcz.at

© Florian Kurcz

1	Grundbegriffe	1
2	Mathematische Beschreibung	6
2.1	Fourier Reihe	7
2.2	Fourier Transformation \mathcal{F}	7
2.3	Laplace-Transformation \mathcal{L}	8
3	Modellbildung:	12
4	Stör- und Führungsverhalten von Regelkreisen	18
4.1	Charakteristische Gleichung	20
4.2	Nyquist Kriterium	21
5	Regelstrecken mit Regler	24
5.1.1	Langzeitverhalten:	24
5.1.2	Einschwingverhalten:	25
5.2	Stationäres Verhalten von Regelkreisen.....	25
5.2.1	Langzeit P-Strecken:	25
5.2.2	Langzeit I-Strecke	27
6	Reglertypen	31
6.1	P-Regler.....	31
6.2	I-Regler	31
6.3	D-Regler	31
6.4	PI-Regler	32
6.5	PD-Regler.....	32
6.6	PID-Regler	33
7	Digitale Regler	33
7.1	Realisierung analoger Regler als digitaler Regler	35
7.2	Z - Transformation.....	39
7.2.1	Rechenregeln der Z Transformation.....	42
7.2.2	Beschreibung des Regelkreises mittels Z-Transformation	45
7.3	Weitere Reglertypen.....	46
7.3.1	Kompensationsregler	46
7.3.2	Kaskadenregelung	46
7.3.3	Zustandsregler.....	47

1 Grundbegriffe

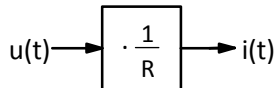
In technischen Prozessen werden physikalische Eingangsgrößen unterschiedlicher Art zu Ausgangsgrößen umgeformt. Alle Prozesse laufen in der Zeit ab, also können sie Mathematisch als Funktionen der Zeit aufgefasst werden. Dabei können Störgrößen auftreten, die das Ergebnis unkontrolliert verändern. Dieser Sachverhalt wird in Signalflussplänen grafisch dargestellt.



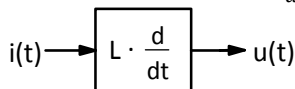
Besitzt ein System nur eine Eingangs und Ausgangsgröße so spricht man von einem Eingrößensystem (SISO = single input single output) ansonsten von einem Mehrgrößensystem (MIMO = multiple input multiple output)

Die Pfeile kennzeichnen einen rückwirkungsfreien Fluss physikalischer Größen. Größen wie elektrischer Strom, Spannung, Kraft, Geschwindigkeit, etc. Die Kästchen stellen eine Umformung der Größen dar. D.h. hinter jedem Kästchen steht ein mathematischer Ausdruck.

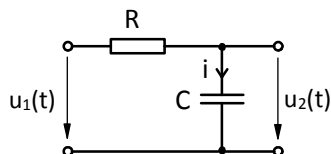
Bsp.1: Widerstand: $i(t) = \frac{1}{R} \cdot u(t)$



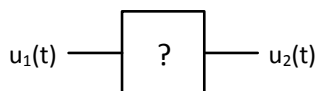
Bsp.2: Spule: $u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$



Bsp.3: Geg. RC-Tiefpass



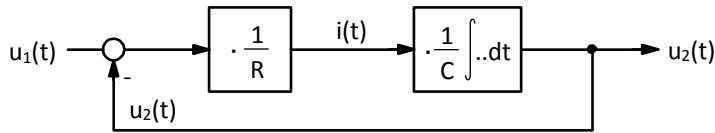
Ges.:



Vorgehensweise: Man sucht nach den physikalischen Gesetzen (Formeln).

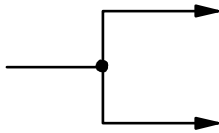
$$i(t) = C \cdot \frac{du_2}{dt} \Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \quad \text{Integrale werden bevorzugt}$$

$$i(t) = \frac{u_1 - u_2}{R}$$



Dazu werden zwei weitere Elemente benötigt:

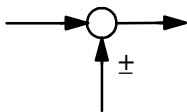
- Verzweigungen



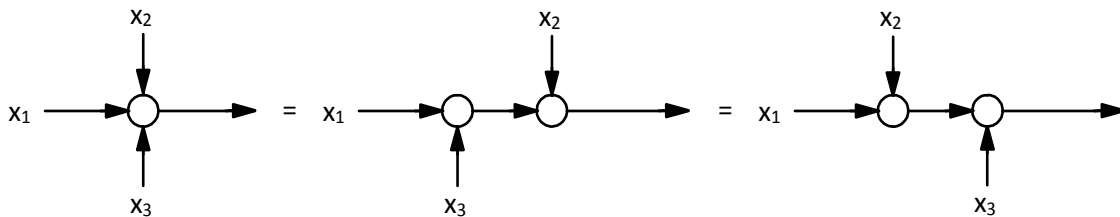
Werden benötigt, um eine Größe auf mehrere Stellen wirken zu lassen.

Die Größe wird dabei nicht aufgeteilt.

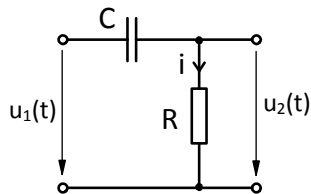
- Summationspunkt



Vorzeichen werden immer Rechts vom Pfeil eingezeichnet. Plus kann dabei weggelassen werden. In einen Summationspunkt können beliebig viele Signale enden. Sie müssen nur alle die gleiche Physikalische Eigenschaft haben. Für Summationspunkte gelten Kommutativ- und Assoziativgesetz.



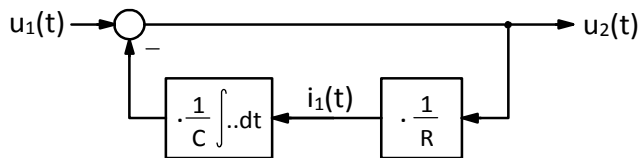
Bsp.4.: Geg. RC-Hochpass



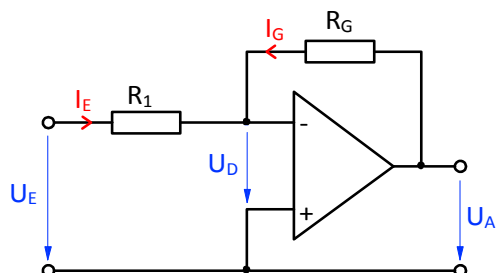
$$i(t) = C \cdot \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = \frac{u_2}{R}$$

Schlechter Ansatz, da kein Integral

$$u_c = u_2 - u_1 = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$



Bsp.5: Invertierender Verstärker

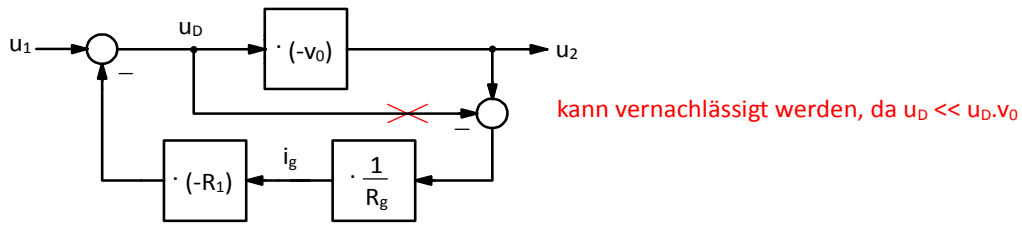


$$u_2 = -v_0 \cdot u_D$$

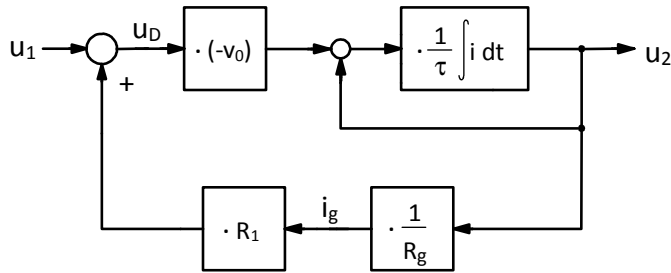
$$u_D = u_1 \cdot i_E \cdot R_1$$

$$i_E = -i_G$$

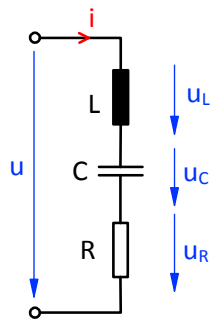
$$i_G = \frac{u_2 - u_D}{R_G}$$



Beachte: wird der OPV als reines Verstärkungselement ohne Zeitverzögerung betrachtet, so funktioniert dieses Modell nicht, da eine unendlich schnelle Rückkopplung erfolgt => arithmetische Schleife. Daher muss das Zeitverhalten des OPV's ebenfalls berücksichtigt werden (= Verhalten eines RC-Tiefpasses)



Bsp.6: Serienschwingkreis



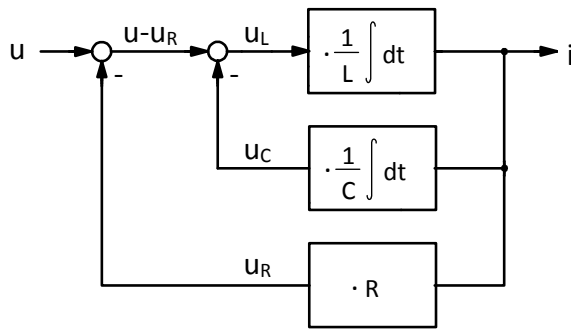
$$i(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

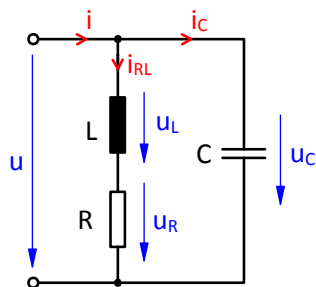
$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$u_L(t) = u(t) - u_C(t) - u_R(t)$$

$$u_L(t) = u(t) - R \cdot i(t) - \frac{1}{C} \int i(t) dt$$



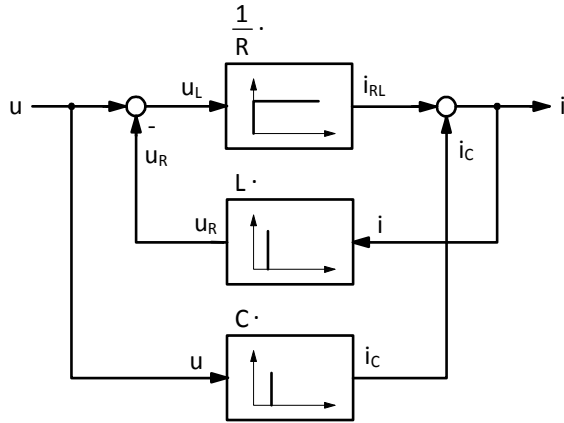
Bsp.7: Parallelschwingkreis



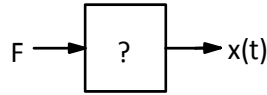
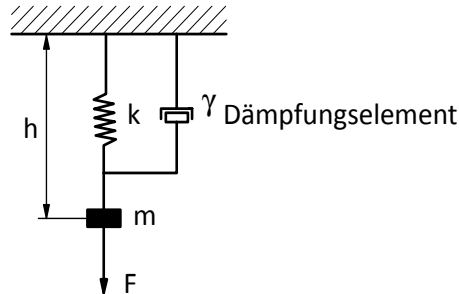
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$$

$$u_R(t) = i_{RL}(t) \cdot R$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$



Bsp.8: Federpendel



- F { Feder dehnen $k \cdot x$
- Massebeschleunigung $m \cdot \ddot{x}$
- Reibungswiderstände $\gamma \cdot \dot{x}$

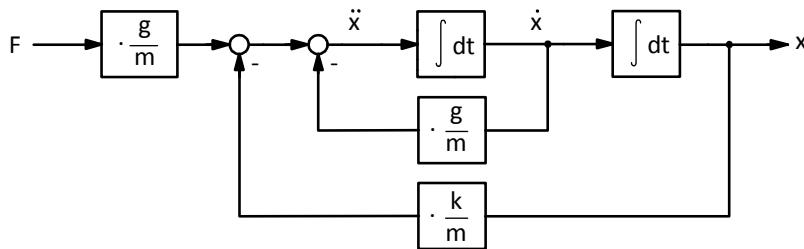
$$F(t) = m \cdot \ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} + k \cdot x$$

Nach \ddot{x} auflösen

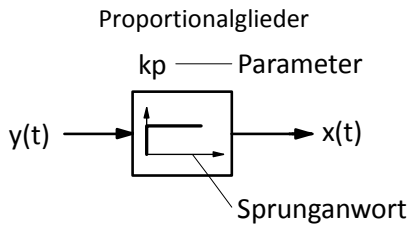
$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot F - \frac{\gamma \cdot \dot{x}}{m} - \frac{k \cdot x}{m}$$

$$\dot{x} = \int \ddot{x} dt$$

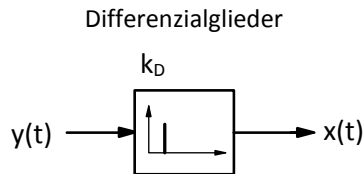
$$x = \int \dot{x} dt$$



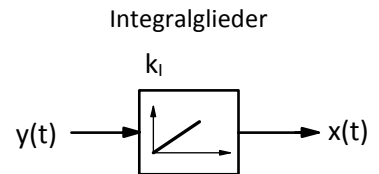
In den obigen Beispielen sind die wichtigsten Funktionsblöcke vorgekommen.



$$x(t) = k_p \cdot y(t)$$



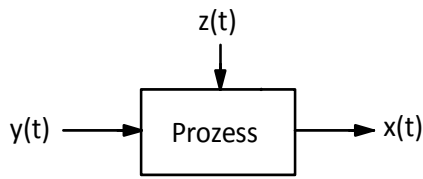
$$x(t) = k_D \cdot \frac{dy}{dt}$$



$$x(t) = k_I \cdot \int y(t) dt$$

In der Automatisierungstechnik unterscheidet man zwischen steuern und regeln.

- Steuern:



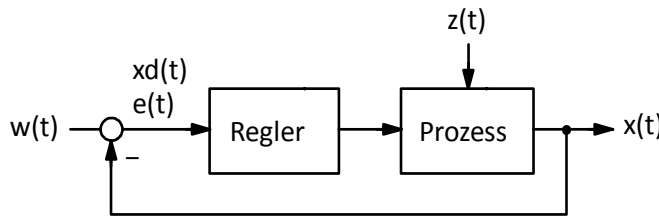
$y(t)$...Stellgröße
 $x(t)$...Steuergröße
 $z(t)$...Störgröße

Steuern ist ein rein vorwärtsgerichteter Prozess, ohne Rückkopplung.

$$x(t) = F(y(t), z(t), t)$$

Nachteil: Störgrößen können zu erheblich Abweichungen führen.

- Regeln:



$y(t)$...Stellgröße
 $x(t)$...Regelgröße, Istwert
 $w(t)$...Führungsgröße, Sollwert
 $x_d(t), e(t)$...Regelungs Δ , Soll-Ist-Abweichung

Unter Regeln versteht man das Rückführen der Regeldifferenz auf den Eingang der Strecke. Der Regler hat dabei die Aufgabe die Regeldifferenz derart zu verarbeiten, dass bei Abweichungen eine möglichst rasche aber stabile Korrigierung erfolgt.

Typische Formen des Zeitverhaltens:

Art \ Stabilität	periodisch	aperiodisch
	stabil	
grenzstabil		
instabil		

Ursachen für das Auftreten einer Regelfrequenz:

- Sollwertänderung
 Der Regler soll den Ist-Wert möglichst schnell an den Sollwert heranzuführen.
- Störgrößen
 sind nicht gezielt beeinflussbare Größen, deren Wirkung der Regler ausgleichen soll.
 z.B. Lageregelung einer CNC-Fräsmaschine, Störgröße ist Kraftrückwirkung des Fräsprozesses.

Daraus ergeben sich zwei unterschiedliche Anwendungsbereiche:

- Festwertregelung
 Der Sollwert $w(t)$ ändert sich nicht (kaum) z.B. Temperaturregelung, Spannungsregelung. Die Aufgabe des Reglers besteht im Ausregeln der Störgrößen
- Folgeregelung
 Der Sollwert ändert sich dauernd, die Aufgabe des Reglers ist ein möglichst rasches Nachführen des Istwertes. Zusätzlich können auch noch Störgrößen auftreten die ausgeglichen werden müssen.

2 Mathematische Beschreibung

Die allgemeine mathematische Beschreibung von zeitlichen Vorgängen erfolgt durch Differentialgleichungen

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, t) = y(t)$$

Um das Zeit-Verhalten des Systems zu beschreiben, müssen die Differentialgleichungen des Systems gelöst werden. Dazu gibt es je nach Art der Differentialgleichung verschiedenste Lösungsverfahren. Eine Lösungsmethode macht sich die Tatsache zu nutze, dass alle zeitlichen Vorgänge als Überlagerung von Schwingungen unterschiedlicher Frequenz aufgefasst werden können (Fourier).

Folgender Ansatz:

$$x(t) = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot j\omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\ddot{x}(t) = A \cdot (j\omega)^2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \text{Multiplikation mit } j\omega$$

Somit wird aus der Differentialgleichung eine komplexe Algebraische Gleichung.

$\underline{U}_2(\omega) = F(\omega) \cdot \underline{U}_1(\omega)$	$F(\omega)$ Übertragungsfunktion	Formel 2.1—1
---	--	---------------------

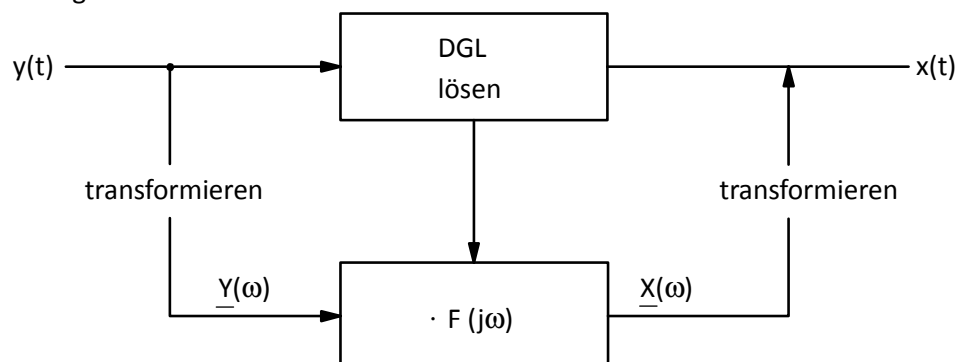
Die Spannung wird jetzt nicht mehr als eine Funktion der Zeit betrachtet (uninteressant da Sinusform bekannt), sondern als Funktion der Frequenz (Amplitude und Phase der Sinusschwingung ändern sich mit der Frequenz). Das Ausgangssignal lässt sich nun durch Multiplikation des Eingangssignals mit der Komplexen Übertragungsfunktion $F(\omega)$ berechnen. $F(\omega)$ kann auch im Bodediagramm/Ortskurve grafisch dargestellt werden.

Dabei ist zu unterscheiden in

- Lineares System
Übertragung ist unabhängig der Amplitude des Eingangssignals. D.h. aus dem Sinus am Eingang wird wieder ein Sinus am Ausgang. $f_1 \Rightarrow f_1$
- Nicht-lineares System
Das Eingangssignal wird verzerrt am Ausgang wiedergegeben, daher ergibt eine Fourier-Analyse mehrere Frequenzen. $f_1 \Rightarrow f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$
(f_1 ... Grundschwingung, f_2, f_3, \dots Oberschwingungen)

Folglich ist bei nichtlinearen Systemen keine eindeutige Zuordnung zwischen Eingangs- und Ausgangsfrequenz möglich. Daher können sie auch nicht im Frequenzbereich dargestellt werden. Es lassen sich jedoch die meisten technischen Prozesse im Betriebsbereich linearisieren, sodass dieser Lösungsansatz zielführend ist.

Lösungsverfahren

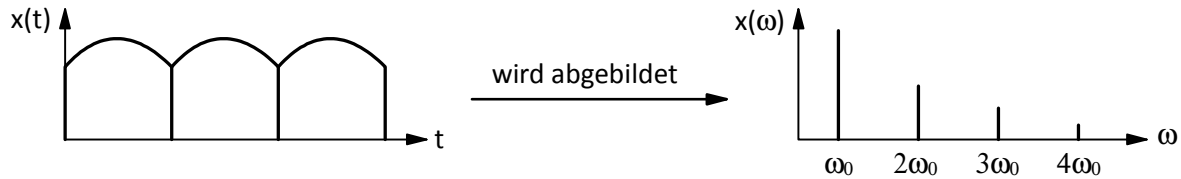


Um nun im Frequenzbereich arbeiten zu können, muss das Eingangssignal $y(t)$ in sein Frequenzspektrum von $Y(\omega)$ bzw. das Ausgangsspektrum $X(\omega)$ in das zugehörige Zeitsignal $x(t)$.

2.1 Fourier Reihe

Ist $x(t)$ ein periodisches Signal so kann es durch Fourieranalyse in lauter Sinusförmige Anteile zerlegt werden.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)] \quad \text{Formel 2.1-1}$$



wobei ω_0 die Grundfrequenz und $2\omega_0, 3\omega_0$ die Oberschwingungen darstellen. a_n und b_n sind die Koeffizienten, die Amplitude und Phase der einzelnen Frequenzen beinhalten.

In komplexer Schreibweise:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \quad X_n = a_n + j \cdot b_n \quad \text{Formel 2.1-2}$$

$$\underline{X}(n) = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} x(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt \quad \text{Formel 2.1-3}$$

2.2 Fourier Transformation \mathcal{F}

Ein nicht periodisches Signal (wie es praktisch vorkommt) kann als periodisches Signal mit Periodendauer unendlich aufgefasst werden. Daher geht ω_0 gegen 0 und die Oberschwingungen wandern immer näher zusammen. d.h. das diskrete Spektrum $n \cdot \omega_0$ geht in ein kontinuierliches Spektrum über.

$$\underline{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \quad \text{Formel 2.2-1}$$

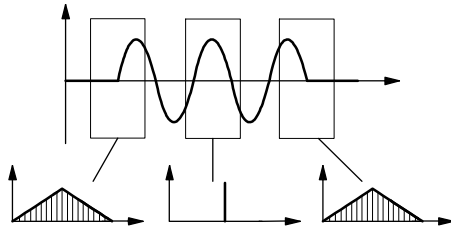
Rücktransformation:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega \quad \text{Formel 2.2-2}$$

Die Fouriertransformation ist für die Regelungstechnik ungünstig, da:

1. Die Zeit bei $-\infty$ beginnt und die Vergangenheit nicht darstellbar ist.
2. Für wichtige unstetige Funktionen keine geschlossen Lösung möglich ist.

3. Sie nur ein statisches Frequenzspektrum liefert.



Deshalb verwendet man eine modifizierte Art, die so genannte Laplace Transformation.

2.3 Laplace-Transformation \mathcal{L}

$$\underline{X}(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$s = \delta + j\omega$
 $\delta \dots$ Dämpfungsterm

Formel 2.3—1

Der Dämpfungsterm enthält die zeitliche Änderung des Frequenzspektrums.

Rücktransformation:

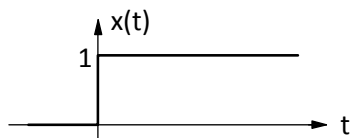
$$x(t) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \int_{\delta-j\omega}^{\delta+j\omega} \underline{X}(s) \cdot e^{s \cdot t} ds$$

Formel 2.3—2

Da das Rücktransformationsintegral schwierig zu lösen ist, nutzt man so genannte Korrespondenztafeln, in diesen sind die wichtigsten Grundfunktionen enthalten.

Bsp.1:

Einschalt-, Sprungfunktion



$$x(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon(t) \circ \bullet E(s)$$

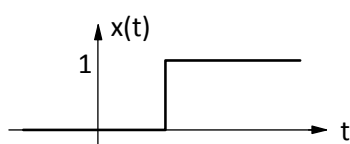
$$E(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt = -\frac{1}{s} \cdot (e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{s} = \frac{1}{\delta + j\omega}$$

$$|E(s)| = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}$$

$$\text{bei } \omega = 0 \Rightarrow |E(s)| = \frac{1}{\delta}$$

Bsp.2:

Um a nach rechts verschobene Einschaltfunktion



$$x(t) = \varepsilon(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ 1 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

$$x(t) \circ \bullet E(s - a)$$

$$E(s) = \int_0^a 0 \cdot e^{-s \cdot t} dt + E(s) = \int_a^{\infty} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \Big|_a^{\infty} = \frac{1}{s} \cdot e^{-a \cdot s}$$

Das Frequenzspektrum ist wieder das gleiche wie bei Bsp1. Jedoch um die Zeitspanne a zeitlich verschoben. Dieser Zusammenhang gilt allgemein für eine beliebige Funktion.

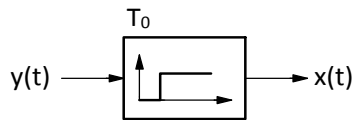
➤ Verschiebungssatz:

$$x(t - a) \quad X(s) \cdot e^{-a \cdot s}$$

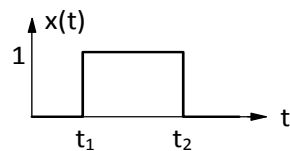
Formel 2.3—3

Praktische Bedeutung hat der Verschiebungssatz bei Totzeitgliedern PT_0 (Zeitverzögerung 0ter Ordnung) z.B. Förderband, Rohrleitung, Signallaufzeit, usw...

Symbol:



Bsp.3:



$$x(t) = \varepsilon(t - t_1) - \varepsilon(t - t_2)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot (e^{-t_1 \cdot s} - e^{-t_2 \cdot s})$$

Bsp.4:

$$x_1(t) = x(t) \cdot e^{-a \cdot t} \quad X_1(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-(s+a) \cdot t} dt = F(s + a)$$

➤ Dämpfungssatz:

$$x(t) \cdot e^{\mp a \cdot t} \quad X_1(s \pm a)$$

Formel 2.3—4

Bsp.5:

$$y(t) = \frac{d x(t)}{d t} = \dot{x}(t)$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} \dot{x}(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$$\int_0^{\infty} u \cdot v' = u \cdot v \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u' \cdot v$$

$$u = e^{-s \cdot t} \Rightarrow u' = -s \cdot e^{-s \cdot t}$$

$$v' = \dot{x}(t) \Rightarrow v = x(t)$$

$$Y(s) = u \cdot v \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u' \cdot v = e^{-s \cdot t} \cdot x(t) \Big|_0^{\infty} + s \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot x(t) dt$$

$$= e^{-s \cdot \infty} \cdot x(\infty) - e^{-s \cdot 0} \cdot x(0) + s \cdot X(s) = s \cdot X(s) - x(0)$$

➤ Differentiationssatz:

$$\frac{dx}{dt} \quad s \cdot X(s) - x(0)$$

Formel 2.3—5

Das heißt, dass eine Differentiation einer Funktion im Frequenzbereich in eine Multiplikation mit s übergeht. Daher kann jede lineare Differentiationsgleichung in eine Algebraische Gleichung in s überführt werden. Ähnlich wie beim Ansatz mit $j\omega$

Allgemeine DGL:

$$b_0 \cdot y + b_1 \cdot y' + b_2 \cdot y'' + \dots + b_n \cdot y^{(n)} = a_0 \cdot x + a_1 \cdot x' + a_2 \cdot x'' + \dots + a_m \cdot x^{(m)}$$

$$b_0 \cdot Y(s) + b_1 \cdot s \cdot Y(s) + \dots + b_n \cdot s^n \cdot Y(s) = a_0 \cdot X(s) + a_1 \cdot s \cdot X(s) + \dots + a_m \cdot s^m \cdot X(s)$$

$$Y(s) \cdot (b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_n \cdot s^n) = X(s) \cdot (a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_m \cdot s^m)$$

➤ Übertragungsfunktion:

$$F(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_n \cdot s^n}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_m \cdot s^m}$$

Formel 2.3—6

Bsp.1:

Geg. System 2. Ordnung

$$y = \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + x$$

Ges. Übertragungsfunktion

$$Y(s) = s^2 \cdot X(s) + 3s \cdot X(s) + X(s)$$

$$Y(s) = X(s) \cdot (s^2 + 3s + 1)$$

$$F(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

Bsp.2:

Geg. Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s + 1}$$

Ges. Differentialgleichung

$$F(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s + 1}$$

$$X(s) \cdot (s^3 + 4s^2 + 3s + 1) = Y(s) \cdot (2s + 1)$$

$$X(s) \cdot s^3 + X(s) \cdot 4s^2 + X(s) \cdot 3s + X(s) = Y(s) \cdot 2s + Y(s)$$



$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 3x(t) + x(t) = 2\dot{y}(t) + y(t)$$

Zusammenstellung der wichtigsten Rechenregeln:

- | | | |
|-------------------------|--|---------------|
| 1. Linearität | $a \cdot f(t) \circ \bullet a \cdot F(s)$ | Formel 2.3—7 |
| 2. Überlagerung | $f_1(t) + f_2(t) \circ \bullet F_1(s) + F_2(s)$ | Formel 2.3—8 |
| 3. Faltungssatz | $f_1(t) * f_2(t) \circ \bullet F_1(s) \cdot F_2(s)$ | Formel 2.3—9 |
| 4. Ähnlichkeitssatz | $f(a \cdot t) \circ \bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$ | Formel 2.3—10 |
| 5. Verschiebungssatz | $f(t - a) \circ \bullet F(s) \cdot e^{-a \cdot s}$ | Formel 2.3—11 |
| 6. Dämpfungssatz | $f(t) \cdot e^{-a \cdot t} \circ \bullet F(s + a)$ | Formel 2.3—12 |
| 7. Differentiationssatz | $\frac{df(t)}{dt} \circ \bullet s \cdot F(s) - f(0)$ | Formel 2.3—13 |
| 8. Integrationssatz | $\int f(t) dt \circ \bullet \frac{1}{s} \cdot F(s)$ | Formel 2.3—14 |

Korrespondenztabelle:

	Bildfunktion $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	1	$\delta(t) = \frac{d \varepsilon(t)}{dt}$
2	s	$\delta'(t) = \frac{d \varepsilon^2(t)}{dt^2}$
3	$\frac{1}{s}$	$\varepsilon(t)$
4	$\frac{1}{s^2}$	$t = \int \varepsilon(t) dt$
5	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$
6	$\frac{\tau}{1 + \tau \cdot s}$	$e^{-\frac{t}{\tau}}$
7	$\frac{1}{1 + \tau \cdot s}$	$\frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
8	$\frac{\tau}{s \cdot (1 + \tau \cdot s)}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$
9	$\frac{\tau^2}{(1 + \tau \cdot s)^2}$	$t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
10	$\frac{1}{s - a}$	$e^{a \cdot t}$
11	$\frac{1}{s \cdot (s - a)}$	$\frac{1}{a} \cdot (e^{a \cdot t} - 1)$
12	$\frac{1}{s^2 \cdot (s - a)}$	$\frac{1}{a^2} \cdot (e^{a \cdot t} - 1 - a \cdot t)$
13	$\frac{s}{(s - a)^2}$	$(1 + a \cdot t) \cdot e^{a \cdot t}$
14	$\frac{1}{(s - a)^2}$	$t \cdot e^{a \cdot t}$
15	$\frac{1}{(s - a)^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!} \cdot e^{a \cdot t}$
16	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(a \cdot t)$
17	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot t)$
18	$\frac{1}{s \cdot (s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2} \cdot (1 - \cos(a \cdot t))$
19	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(a \cdot t)$
20	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sinh(a \cdot t)$
21	$\frac{1}{s \cdot (s^2 - a^2)}$	$\frac{1}{a^2} \cdot (\cosh(a \cdot t) - 1)$
22	$\frac{s + b}{a^2 + (s + b)^2}$	$e^{-b \cdot t} \cdot \cos(a \cdot t)$
23	$\frac{1}{a^2 + (s + b)^2}$	$\frac{1}{a} \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \sin(a \cdot t)$

3 Modellbildung:

1. Aufstellen der Gleichungen für die physikalischen Zusammenhänge
2. Unterteilen in eine geeignete Anzahl von Übertragungsfunktionen die durch jeweils einen Block dargestellt werden.
3. Verbinden der Blöcke mit Wirkungslinien (Zusammenhänge überlegen)
4. Vereinfachen der Blockstruktur und ermitteln der Gesamtübertragungsfunktion

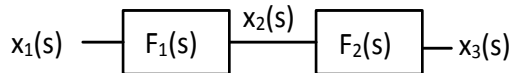
Aus den Rechenregeln der Laplace-Transformation lassen sich Regeln herleiten wie mit den Blöcken im Signalfussplan umzugehen ist.

- Serienschaltung:

$$X_2(s) = X_1(s) \cdot F_1(s)$$

$$X_3(s) = X_2(s) \cdot F_2(s)$$

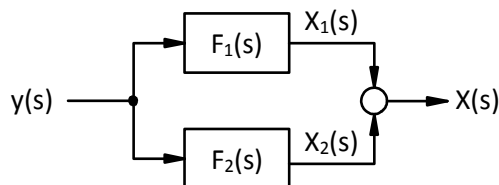
$$X_3(s) = X_1(s) \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)$$



$$F_{Ges} = F_1 \cdot F_2$$

Formel 2.3—1

- Parallelschaltung:



$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

$$X_1(s) = Y(s) \cdot F_1(s)$$

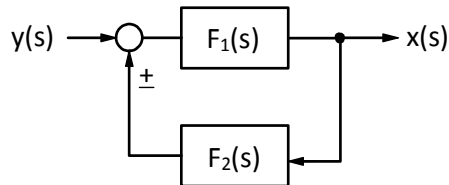
$$X_2(s) = Y(s) \cdot F_2(s)$$

$$X(s) = Y(s) \cdot (F_1(s) + F_2(s))$$

$$F_{Ges}(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

Formel 2.3—2

- Rückkopplung:



$$X(s) = (Y(s) \pm Y_R(s)) \cdot F_1(s)$$

$$Y_R(s) = X(s) \cdot F_2(s)$$

$$X(s) = (Y(s) \pm X(s) \cdot F_2(s)) \cdot F_1(s) = Y(s) \cdot F_1(s) \pm X(s) \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)$$

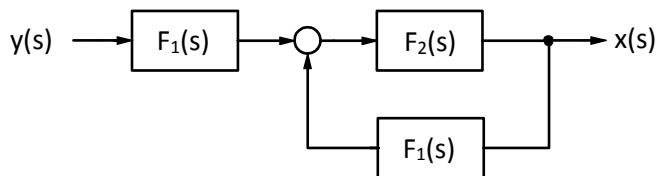
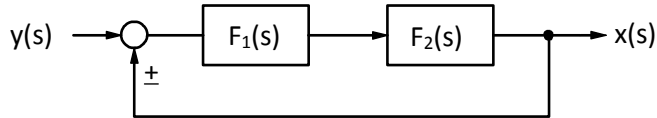
$$X(s) \cdot (1 \pm F_1(s) \cdot F_2(s)) = Y(s) \cdot F_1(s)$$

$$F_{Ges} = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{F_1(s)}{1 \pm F_1(s) \cdot F_2(s)}$$

$$F_{Ges} = \frac{F_1(s)}{1 \pm F_1(s) \cdot F_2(s)}$$

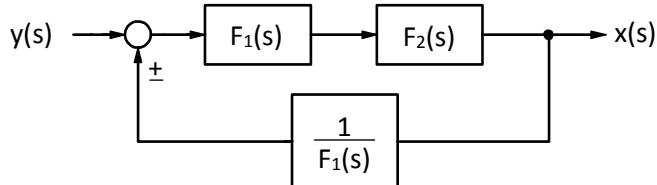
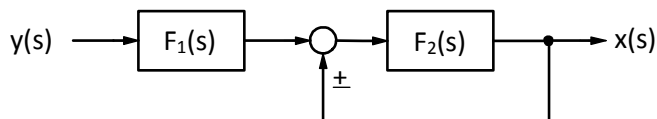
Formel 2.3—3

- Verlegung von Summationspunkten (Distributivgesetz):



Beweis:

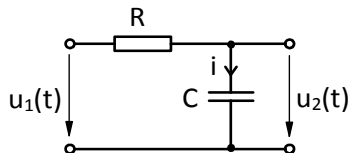
$$F_{Ges} = \frac{F_1(s) \cdot F_2(s)}{1 \mp F_1(s) \cdot F_2(s)} = F_1(s) \cdot \frac{F_2(s)}{1 \mp F_1(s) \cdot F_2(s)}$$



Dasselbe gilt auch für Verzweigungspunkte. Summations- und Verzweigungspunkte dürfen untereinander vertauscht werden, aber nicht miteinander vertauscht werden.

Bsp.1:

RC-Tiefpass



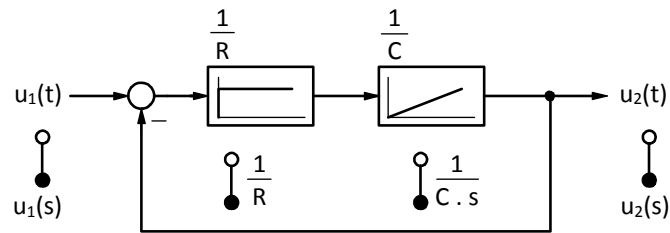
$$u_2(t) + \tau \cdot \dot{u}_2(t) = u_1(t)$$

$$U_2(s) + \tau \cdot s \cdot U_2(s) = U_1(s)$$

$$U_2(s) \cdot (1 + \tau \cdot s) = U_1(s)$$

$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$$

Dieses Ergebnis kann auch aus dem Signalfussplan gewonnen werden.



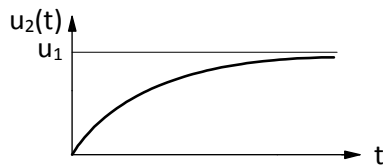
$$F(s) = \frac{\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{C \cdot s}}{1 + \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{\frac{1}{\tau \cdot s}}{1 + \frac{1}{\tau \cdot s}} = \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$$

Sprungantwort:

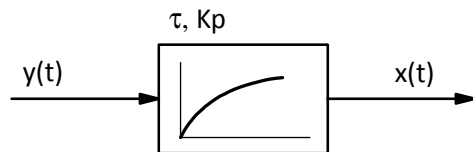
$$U_2(s) = F(s) \cdot U_1(s)$$

$$U_2(s) = \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \cdot \frac{1}{s} \cdot U_1(s)$$

$$U_2(s) = \frac{1}{s \cdot (1 + \tau \cdot s)} \cdot U_1(s) \quad \bullet \rightarrow u_2(t) = u_1(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



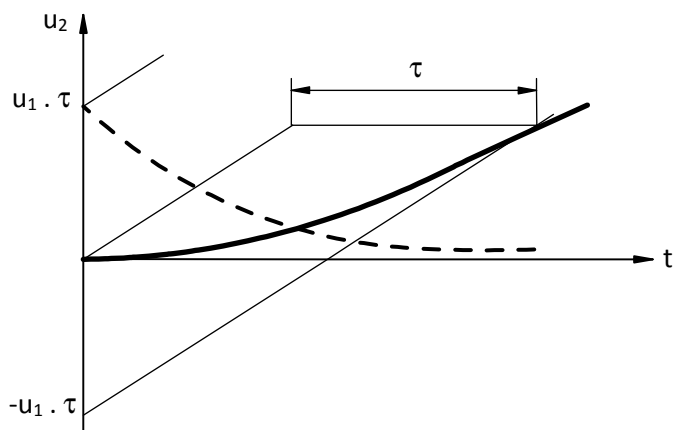
Proportionalglied mit Zeitverzögerung 1. Ordnung:



Anstiegsantwort:

$$U_2(s) = \frac{U_1(s)}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s} = U_1(s) \cdot \frac{1}{s^2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{1}{\tau} + s\right)} = \frac{U_1(s)}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2 \cdot (s - a)}$$

$$U_2(s) \bullet \rightarrow u_2(t) = \frac{u_1(t)}{\tau} \cdot \frac{\tau^2 \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 + \frac{t}{\tau}\right)}{\frac{1}{\tau^2}} = u_1(t) \cdot \left(\tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau + t\right)$$



Verzögerter Anstieg der Ausgangsspannung entspricht der Sprungantwort eines IT₁ Glieds.

2. Lösungsweg:

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s \cdot (1 + \tau \cdot s)} = U_1(s) \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s} = \bullet \circ u_1(t) \cdot \int_0^t 1 - e^{-\frac{t'}{\tau}} dt$$

$$u_2(t) = u_1(t) \cdot \left(\int_0^t 1 dt' - \int_0^t e^{-\frac{t'}{\tau}} dt' \right) = u_1(t) \cdot \left(t \Big|_0^t - \tau \cdot e^{-\frac{t'}{\tau}} \Big|_0^t \right) = u_1(t) \cdot \left(t + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau \right)$$

3. Lösungsweg: Partialbruchzerlegung:

$$U_2(s) = \frac{U_1(s)}{s^2 \cdot (1 + \tau \cdot s)} = \frac{A + B \cdot s}{s^2} + \frac{C}{1 + \tau \cdot s} \Rightarrow U_1(s) = (A + B \cdot s) \cdot (1 + \tau \cdot s) + C \cdot s^2$$

durch Koeffizientenvergleich:

$$A = U_1(s)$$

$$A \cdot \tau + B = 0 \Rightarrow B = -A \cdot \tau = -U_1(s) \cdot \tau$$

$$B \cdot \tau + C = 0 \Rightarrow C = -B \cdot \tau = -U_1(s) \cdot \tau^2$$

$$U_2(s) = \frac{A + B \cdot s}{s^2} + \frac{C}{1 + \tau \cdot s} = \frac{U_1(s) - U_1(s) \cdot \tau \cdot s}{s^2} - \frac{U_1(s) \cdot \tau^2}{1 + \tau \cdot s} = U_1(s) \cdot \left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{1 + \tau \cdot s} \right)$$

$$U_2(s) \bullet \circ u_2(t) = t - \tau \cdot \varepsilon(t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \varepsilon(t)$$

Impulsantwort:

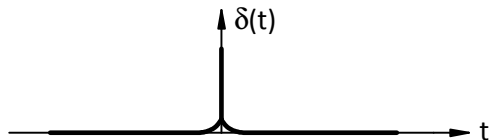
Die Schaltung wird mit einem Impuls (Diracsche δ – Funktion) beaufschlagt. Die Funktion ist ein unendlich schmaler Impuls, der sich aus der Ableitung der Sprungfunktion ergibt.

$$\delta(t) = \frac{d \varepsilon(t)}{d t}$$

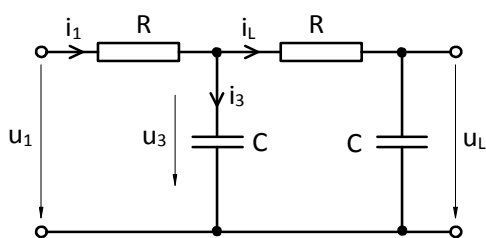
Da $\varepsilon(t)$ eine unstetige Funktion ist, lässt sich über die Form der δ Funktion nichts aussagen.

Es gilt jedoch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \varepsilon(t)}{d t} dt = \varepsilon(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 - 0 = 1$$



Bsp.2:

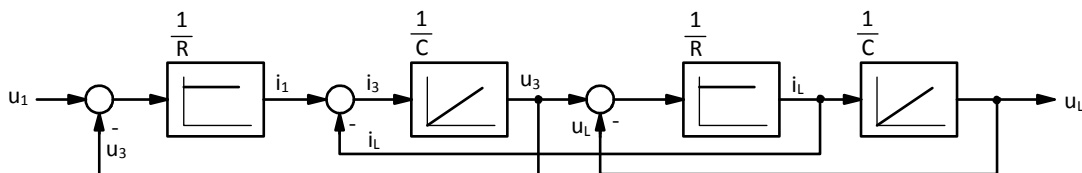


$$u_3(t) = \frac{1}{C} \int i_3(t) dt$$

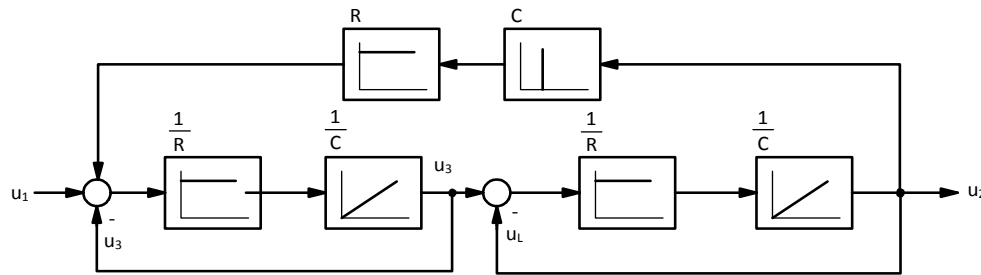
$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = \frac{u_1(t) - u_3(t)}{R} - i_2(t)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C} \int i_2(t) dt$$

$$i_2(t) = \frac{u_3(t) - u_2(t)}{R}$$



Beachte: Das 2. RC-Glied belastet das 1. mit seinem Strom, daher liefert die Übertragungsfunktion ein anderes Ergebnis als ein hintereinander schalten 2er PT1-Blöcke.



Übertragungsfunktion:

$$F_V = \left(\frac{1}{1 + \tau \cdot s} \right)^2$$

$$F_R = \tau \cdot s$$

$$F_{Ges} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \cdot \tau \cdot s} = \frac{1}{(1 + \tau \cdot s)^2 + \tau \cdot s} = \frac{1}{1 + 3\tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2}$$

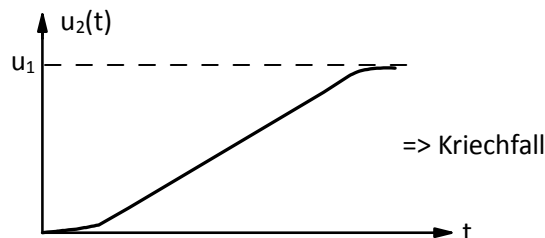
Sprungantwort:

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + 3\tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2} \rightarrow u_2(t) = u_1(t) \cdot \left(1 - \frac{T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \right)$$

Da beide Terme 0 werden, wenn $T_1=T_2$ ist, kann versucht werden, den Koeffizienten mit Hilfe der Steigung beider Funktionen zu ermitteln (l'Hospital)

$$\lim_{T_1 \rightarrow T_2} \left(1 - \frac{T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \right) = 1 - \frac{1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + T_1 \cdot t \cdot \frac{1}{T_1^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}}{1} = e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \left(1 + \frac{t}{T_1} \right)$$

$$\Rightarrow u_2(t) = u_1(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \left(1 + \frac{t}{T_1} \right) \right)$$



Es handelt sich hierbei wiederum um ein Proportionalglied aber mit Zeitverzögerung 2ter Ordnung. Man spricht auch von einem PT₂.

$$F_{PT_2} = \frac{1}{1 + 2\vartheta T_0 \cdot s + T_0^2 \cdot s^2}$$

$$T_0 = \frac{1}{\omega_0}$$

ϑ Dämpfung

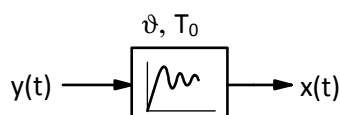
ω_0 ... Eigenfrequenz

$\vartheta > 1$ Kriechfall

$\vartheta = 1$ Aperiodischer Grenzfall

$\vartheta < 1$ schwingfähig

Systeme 2ter Ordnung sind in der Technik von enormer Bedeutung, da alle Schwingungsvorgänge in der Mechanik durch sie beschrieben werden können.



Bsp.: Feder-Masse-Schwinger

$$m \cdot \ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} + kx = F$$

Dimensionslosmachen /:k

$$\frac{m}{k} \cdot \ddot{x} + \frac{\gamma}{k} \cdot \dot{x} + x = \frac{F}{k}$$

Auf beiden Seiten der Gl. Einheit Meter

$$\Rightarrow \frac{m}{k} \cdot X(s) \cdot s^2 + \frac{\gamma}{k} \cdot X(s) \cdot s + X(s) = Y(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{k} \cdot s + \frac{m}{k} \cdot s^2}$$

Aus Koeffizientenvgl.

$$T_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$2\vartheta \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\gamma}{k} \Rightarrow \vartheta = \frac{\gamma \cdot \sqrt{k}}{2 \cdot k \cdot \sqrt{m}} = \frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$$

Mit diesem Modell lassen sich mechanische Antriebssysteme (Antriebswellen, Getriebe, etc.) gut beschreiben.

Sprungantwort:

$$u_2 = \frac{u_1}{s} \cdot F(s)$$

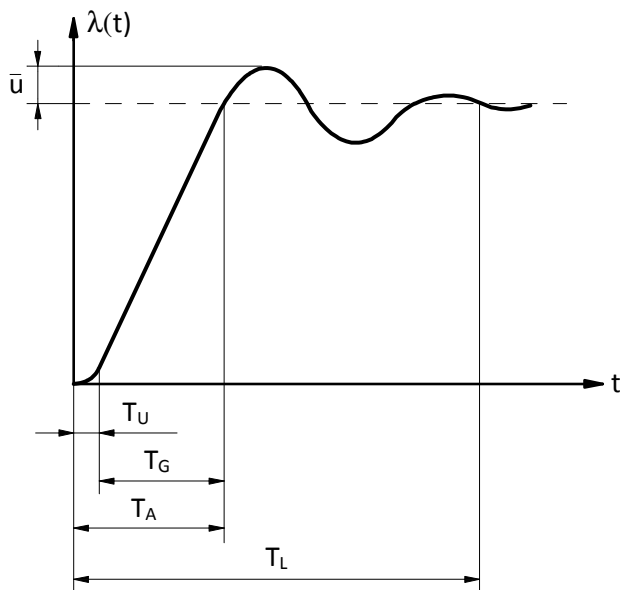
Anstiegsantwort:

$$u_2 = \frac{u_1}{s^2} \cdot F(s)$$

Impulsantwort:

$$u_2 = u_1 \cdot F(s)$$

Weitere wichtige Parameter:



\bar{u} *Überschwingweite*

T_U *Verzugszeit*

T_G *Ausgleichszeit*

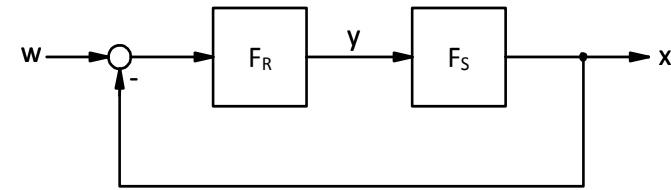
T_A *Anregelzeit*

T_E *Einstellzeit (Ausregelzeit)*

4 Stör- und Führungsverhalten von Regelkreisen

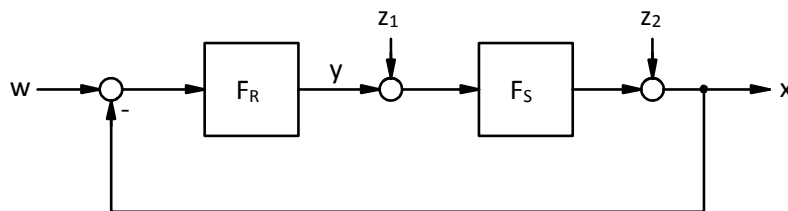
Interessant für die Dimensionierung des Reglers ist das Gesamtverhalten des geschlossenen Regelkreises und zwar sowohl für Führungsgröße als auch für auftretende Störgrößen.

• Führungsverhalten

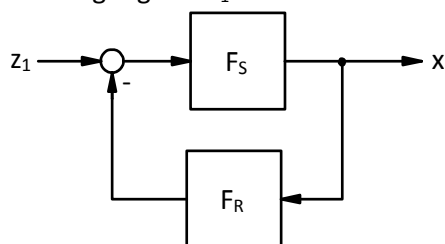


$$F_W = \frac{F_S \cdot F_R}{1 + F_S \cdot F_R}$$

• Störverhalten

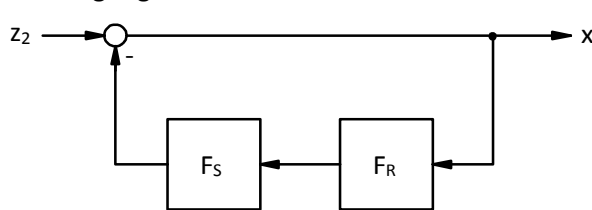


Übertragung von z_1



$$F_{Z_1} = \frac{F_S}{1 + F_S \cdot F_R}$$

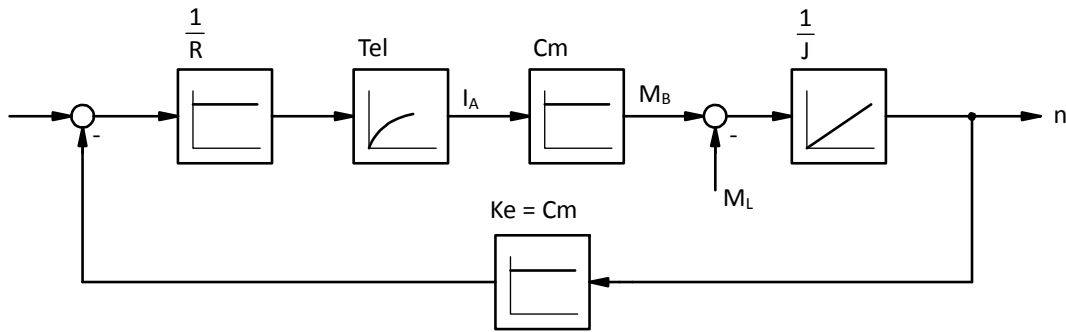
Übertragung von z_2



$$F_{Z_2} = \frac{1}{1 + F_S \cdot F_R}$$

Führungs- und Störverhalten sind verschieden, gemeinsam ist ihnen jedoch der Nenner in der Übertragungsfunktion $(1 + F_R \cdot F_S)$, dieser ist für die Stabilität des Regelkreises von Bedeutung. Wird der Nenner in der Übertragungsfunktion 0, so geht die Ausgangsgröße gegen unendlich d.h. das System ist instabil.

Bsp.: Gleichstrommotor



- C_M Drehmomentkonstante [Nm/A]
- M_B Beschleunigungsmoment [Nm]
- M_L Lastmoment
- J Massenträgheitsmoment [kg m²]
- K_E Gegen EMK [Vs]

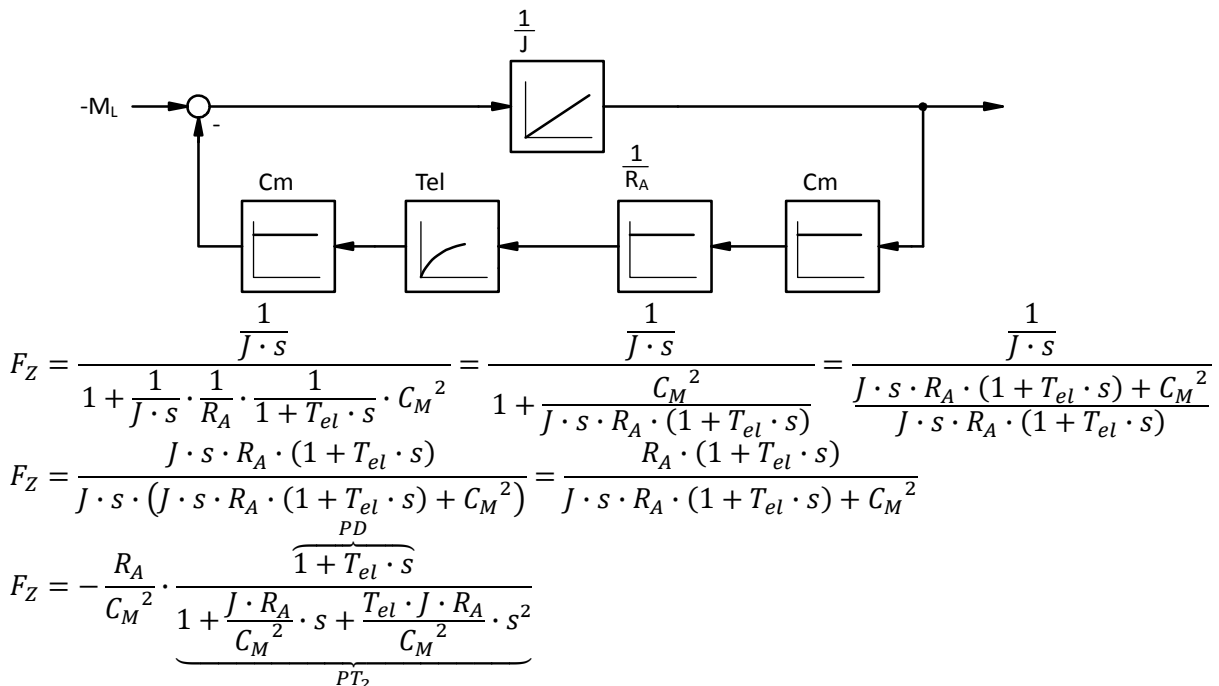
- Führungsfrequenzgang:

$$F_W = \frac{\frac{1}{R_A} \cdot \frac{1}{1 + T_{el} \cdot s} \cdot C_M \cdot \frac{1}{J \cdot s}}{1 + \frac{1}{R_A} \cdot \frac{1}{1 + T_{el} \cdot s} \cdot C_M^2 \cdot \frac{1}{J \cdot s}} = \frac{C_M}{R_A \cdot (1 + T_{el} \cdot s) \cdot J \cdot s + C_M^2}$$

$$= \frac{C_M}{C_M^2 + R_A \cdot J \cdot s + R_A \cdot J \cdot s^2 \cdot T_{el}} = \underbrace{\frac{1}{C_M}}_{\text{Vorfaktor (dimensionsbehaftet)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{R_A \cdot J}{C_M^2} \cdot s + \frac{R_A \cdot J \cdot T_{el}}{C_M^2} \cdot s^2}}_{\text{PT2, gibt die Dynamik an (dimensionslos)}}$$

$$2 \cdot \vartheta \cdot T_0 = \frac{R_A \cdot J}{C_M^2} \Rightarrow \vartheta = \frac{R_A \cdot J \cdot C_M}{2 \cdot C_M^2 \cdot \sqrt{R_A \cdot T_{el} \cdot J}} = \sqrt{\frac{J \cdot R_A}{4 \cdot T_{el} \cdot C_M^2}}$$

- Störfrequenzgang:



$$F_Z = \frac{\frac{1}{J \cdot s}}{1 + \frac{1}{J \cdot s} \cdot \frac{1}{R_A} \cdot \frac{1}{1 + T_{el} \cdot s} \cdot C_M^2} = \frac{\frac{1}{J \cdot s}}{1 + \frac{C_M^2}{J \cdot s \cdot R_A \cdot (1 + T_{el} \cdot s)}} = \frac{\frac{1}{J \cdot s}}{\frac{J \cdot s \cdot R_A \cdot (1 + T_{el} \cdot s) + C_M^2}{J \cdot s \cdot R_A \cdot (1 + T_{el} \cdot s)}}$$

$$F_Z = \frac{J \cdot s \cdot R_A \cdot (1 + T_{el} \cdot s)}{J \cdot s \cdot (J \cdot s \cdot R_A \cdot (1 + T_{el} \cdot s) + C_M^2)} = \frac{PD}{J \cdot s \cdot R_A \cdot (1 + T_{el} \cdot s) + C_M^2}$$

$$F_Z = -\frac{R_A}{C_M^2} \cdot \underbrace{\frac{1 + T_{el} \cdot s}{1 + \frac{J \cdot R_A}{C_M^2} \cdot s + \frac{T_{el} \cdot J \cdot R_A}{C_M^2} \cdot s^2}}_{PT_2}$$

4.1 Charakteristische Gleichung

Der gemeinsame Nenner ($1+F_R \cdot F_S$) gibt Auskunft über die Stabilität ($F_R \cdot F_S =$ Produkt aller im Regelkreis vorhandenen Blöcke). $F_R \cdot F_S = F_0$...open loop gain = Kettenschaltung aller im Regelkreis enthaltenen Teilübertragungsfunktionen. F_0 ist im Allgemeinen eine gebrochene Rationale Übertragungsfunktion

$$F_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{Z_0 + Z_1 \cdot s + Z_2 \cdot s^2 + \dots + Z_p \cdot s^p}{N_0 + N_1 \cdot s + N_2 \cdot s^2 + \dots + N_q \cdot s^q} \quad \text{mit } q > p. \quad \text{Formel 4.1-1}$$

Wird der Ausdruck $1+F_0$ gleich 0, so treten in der Übertragungsfunktion Polstellen auf d.h. das System wird instabil. Daher müssen zur Stabilitätsbestimmung die Nullstellen des Nenners berechnet werden.

$$1 + F_0(s) = 0$$

$$1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = 0$$

$$N_0(s) + Z_0(s) = 0 \quad \text{.....charakteristische Gleichung} \quad \text{Formel 4.1-2}$$

Die linke Seite der charakteristischen Gleichung stellt ein Polynom vom Grad q dar

$$c_0 + c_1 \cdot s + c_2 \cdot s^2 + \dots + c_q \cdot s^q$$

$$c_0 = Z_0 + N_0$$

$$c_1 = Z_1 + N_1$$

...

$$c_p = Z_p + N_p$$

$$c_p + 1 = N_p + 1$$

$$c_q = N_q$$

Ein Polynom vom Grad q besitzt immer q Lösungen (Reelle oder Komplexe)

$s_1 \dots s_q$...Nullstellen

Dabei entspricht jede Lösung s, mit $i \in \{1, \dots, q\}$ mit einer Schwingungsgleichung $e^{s_i \cdot t}$ mit

$$s_i = \delta_i + j \cdot \omega_i$$

Sind nun alle $\delta_i < 0$, so klingen die Schwingungen ab und der Regelkreis zeigt ein stabiles Verhalten

Allgemeines Stabilitätskriterium:

Ein Regelkreis ist dann stabil, wenn alle Nullstellen der charakteristischen Gleichung einen negativen Realteil besitzen ($\delta_i < 0$).

$$\delta_i < 0 \Rightarrow \text{stabil} \quad i \in \{1, \dots, q\} \quad \text{Formel 4.1-3}$$

Bsp.: Elektromotor

$$F_0(s) = \frac{1}{R_A} \cdot \frac{1}{1 + T_{el} \cdot s} \cdot C_M \cdot \frac{1}{J \cdot s} \cdot C_M = \frac{C_M^2}{R_A \cdot J} \cdot \frac{1}{s \cdot (1 + T_{el} \cdot s)} \quad \text{...I}_{T1}\text{-Verhalten}$$

$$\frac{C_M^2}{R_A \cdot J} = \alpha$$

$$F_0(s) = \frac{\alpha}{s \cdot (1 + T_{el} \cdot s)}$$

$$\alpha + s \cdot (1 + T_{el} \cdot s) = 0$$

$$T_{el} \cdot s^2 + s + \alpha = 0$$

$$s^2 + \frac{s}{T_{el}} + \frac{\alpha}{T_{el}} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot T_{el}} \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cdot T_{el}^2} - \frac{\alpha}{T_{el}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Entweder } \sqrt{\quad} \text{ imaginär} \Rightarrow \delta = -\frac{1}{2 \cdot T_{el}} < 0 \\ \text{oder } \sqrt{\quad} \text{ reel} \Rightarrow \sqrt{\quad} < \frac{1}{2 \cdot T_{el}} \Rightarrow < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{stabil}$$

Bsp1.:

Gegeben: $F_S(s) = \frac{5}{(1+2s) \cdot (1+28s)}$

Soll mit einem P-Regler $F_R = k_P$ geregelt werden, ist dieses System stabil?

$$F_0(s) = \frac{5 \cdot k_P}{(1 + 2s) \cdot (1 + 28s)}$$

$$5 \cdot k_P + (1 + 2s) \cdot (1 + 28s) = 0$$

$$\Rightarrow 56 \cdot s^2 + 30 \cdot s + 5 \cdot k_P + 1 = 0$$

$$s^2 + \frac{30}{56} \cdot s + \frac{5 \cdot k_P + 1}{56} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{15}{56} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{56}\right)^2 - \frac{5 \cdot k_P + 1}{56}}$$

Für $k_P = 0$

$$= -0,268 \pm 0,232 < 0 \Rightarrow \text{stabil}$$

Für $k_P > 0$

$s_{1/2}$ noch negativer

für komplexe Lösung

$$\delta = -\frac{15}{56} = -0,268 < 0 \Rightarrow \text{dieser Regelkreis ist immer stabil!}$$

Bsp2.: Ist folgende PT1-Strecke stabil?

$$F_S(s) = \frac{4}{1 + 4s}$$

$$F_R(s) = k_P + \frac{0,2}{s} \Rightarrow k_P > 0$$

$$F_0 = \frac{4}{1 + 4s} \cdot \left(k_P \cdot s + \frac{0,2}{s}\right) = \frac{4k_P \cdot s + 0,8}{s \cdot (1 + 4s)}$$

$$4k_P \cdot s + 0,8 + s \cdot (1 + 4s) = 0$$

$$4s^2 + s \cdot (1 + 4k_P) + 0,8 = 0$$

$$s^2 + s \cdot (k_P + 0,25) + 0,2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{k_P + 0,25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_P + 0,25}{2}\right)^2 - 0,2} \Rightarrow \text{stabil}$$

4.2 Nyquist Kriterium

Ein Regelkreis ist dann stabil, wenn die Oszillatorbedingung (Schwingbedingung) nicht erfüllt ist, d.h. die Kreisverstärkung < 1 ist, oder keine Mitkopplung vorhanden ist (Mitkopplung heißt Phasenverschiebung -180°). Um die Stabilität zu bestimmen muss der Frequenzgang des Regelkreises ermittelt werden (open-loop-gain).

Der Frequenzgang der open-loop-gain:

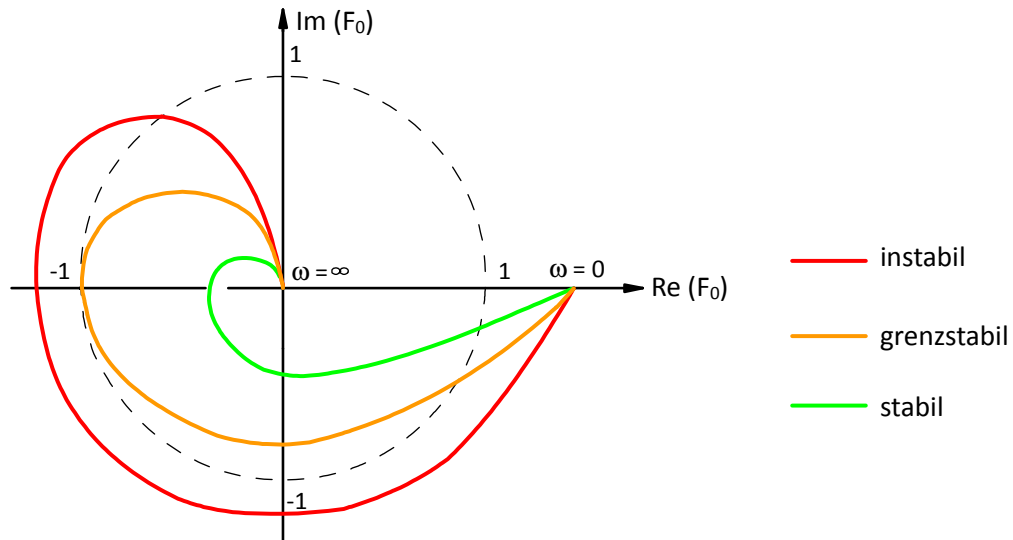
Definition:

Ein Regelkreis ist dann stabil, wenn die Ortskurve des Frequenzganges, des offenen Regelkreises den kritischen Punkt $-1|0$ nicht umschließt.

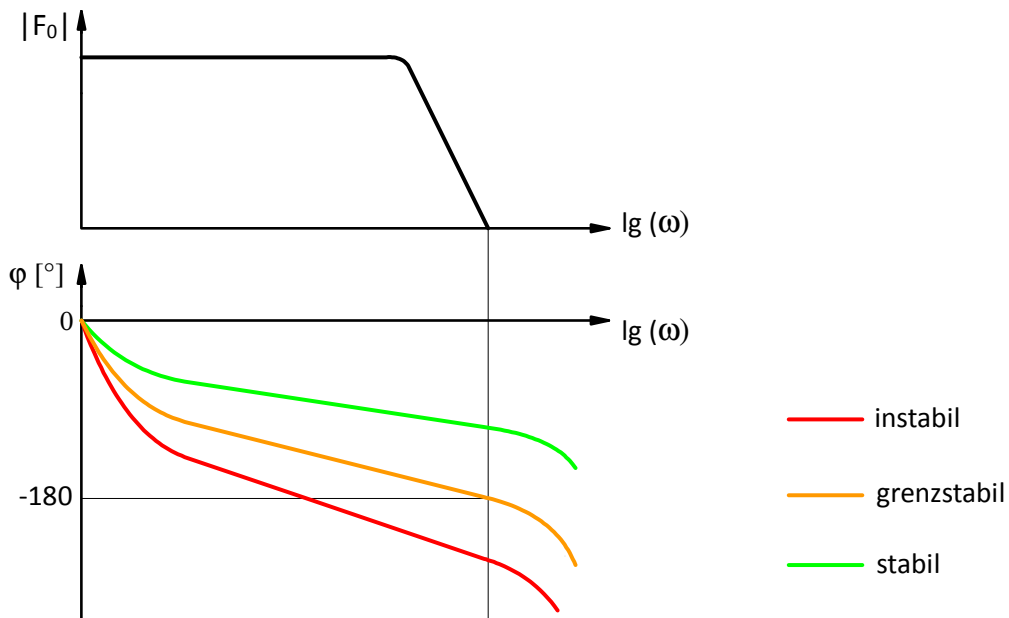
In der Regelungstechnik wird anstatt der Ortskurve das Bodediagramm bevorzugt, da es die Graphische Konstruktion des Frequenzganges des Reglers ermöglicht.

$$lg|F_R| = lg|F_0| - lg|F_S|$$

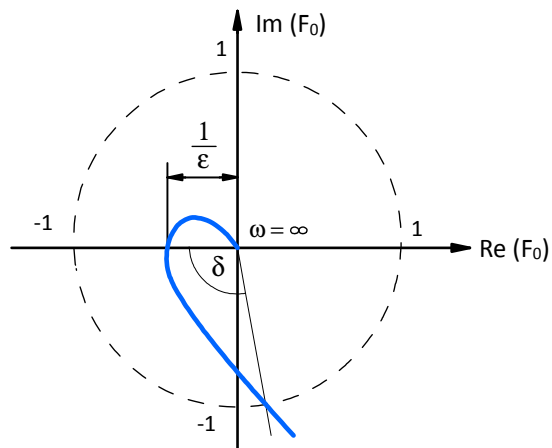
$$\varphi_R = \varphi_0 - \varphi_S$$



Bodediagramm:

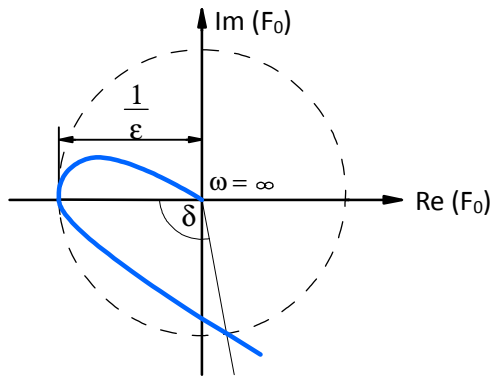


Quantitative Abschätzung der Stabilität:

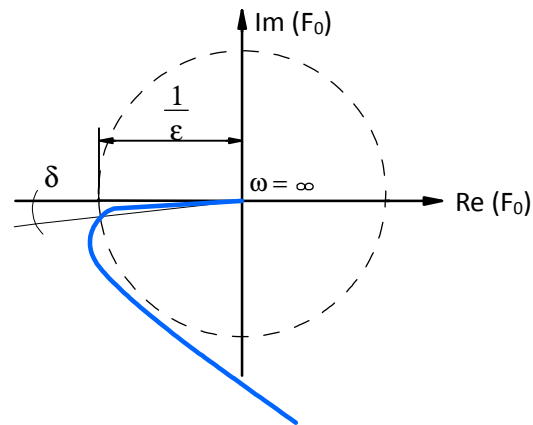


Der Regelkreis ist stabiler je größer ϵ und δ sind.
Wie sind die beiden Größen zu bewerten?

2 Extremfälle:



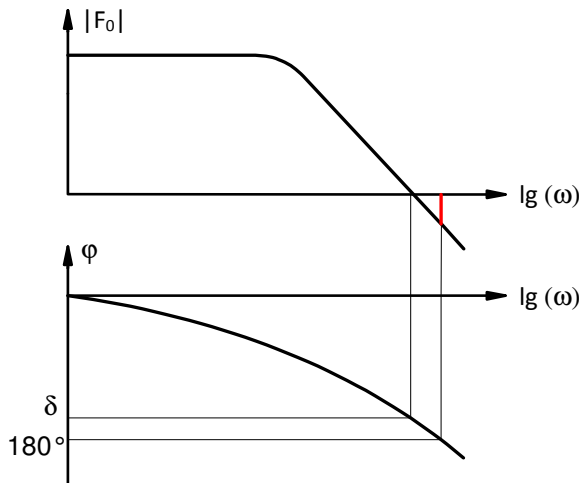
$\epsilon > 1$ (fast 1)
 $\delta > 90^\circ$



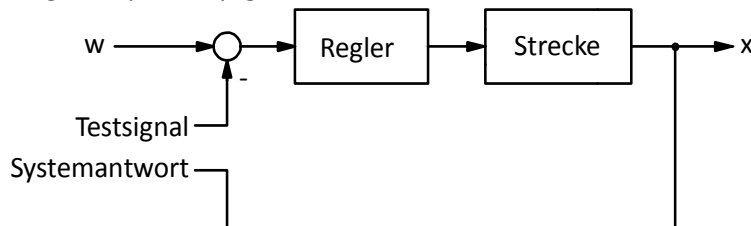
$\epsilon = \infty$
 $\delta = 0^\circ$

In beiden Fällen ist die Stabilität des Regelkreises sehr schlecht, da die Stabilität nur so gut ist, wie es durch das schlechtere der beiden bestimmt wird.

ϵ und δ im Bodediagramm:

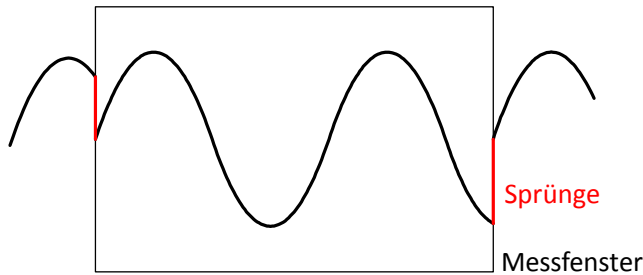


Messung der open-loop-gain:



- Wobbelverfahren: Als Testsignal wird ein Sinus verwendet (enthält genau eine Frequenz). Durch Variieren der Frequenz wird der zu messende Bereich durchlaufen. Dabei ist zu beachten, dass das System zuerst einschwingen muss, dann ist über eine volle Periode des Signals zu messen. Dies ist bei Systemen mit kurzer Zeitkonstante (Elektrische, Mechanische Systeme) unproblematisch, führt jedoch bei Systemen mit großen Zeitkonstanten (chemische und thermische Prozesse) zu extrem langen Messdauern.
- Spektrumanalyse: Hier wird als Testsignal ein weisses Rauschen verwendet, dieses lässt sich durch eine Pseudozufallsfolge digital sehr einfach generieren (PRBS = pseudo random binary sequence). Die Auswertung erfolgt über einen Spektrumanalysator. Da das Testsignal eine konstante Amplitudenverteilung enthält, entspricht das Ausgangsspektrum der Übertragungsfunktion. Das Problem bei der Messung ist der Windowing-Effekt bei der Spektrumanalyse. Dieser kommt daher

zu Stande, da die Messzeit nur eine endliche Dauer besitzt und somit angenommen werden muss, dass sich das Signal außerhalb des Messfensters periodisch fortsetzt.



Man kann durch Überlagerung so genannter Fensterfunktionen versuchen die Unstetigkeitsstellen die am Rand des Messfensters auftreten zu reduzieren. Dadurch wird jedoch das Signal insgesamt ein wenig verfälscht.

5 Regelstrecken mit Regler

Nach ihrem Verhalten kann man Strecken folgendermaßen einteilen:

5.1.1 Langzeitverhalten:

Man betrachtet wie sich die Strecke auf längere Sicht hin verhält und lässt dabei das unmittelbare reagieren auf eine Eingangsgrößen Änderung außer acht.

a. Strecken mit Ausgleich:



Eingangsänderungen Δy im Aussteuerbereich verursachen Ausgangsänderungen Δx , die ebenfalls im Aussteuerbereich liegen.

Diese Strecken sind gegengekoppelt und zeigen ein Langzeit-P-Verhalten.

Sie können auch ohne Regler also gesteuert betrieben werden (P, PT_0 , PT_1 , ... PT_n , PD,... PDT_n).

Bsp.: thermische Systeme, Elektromotoren, mechanische Antriebssysteme, Spannungsquellen.

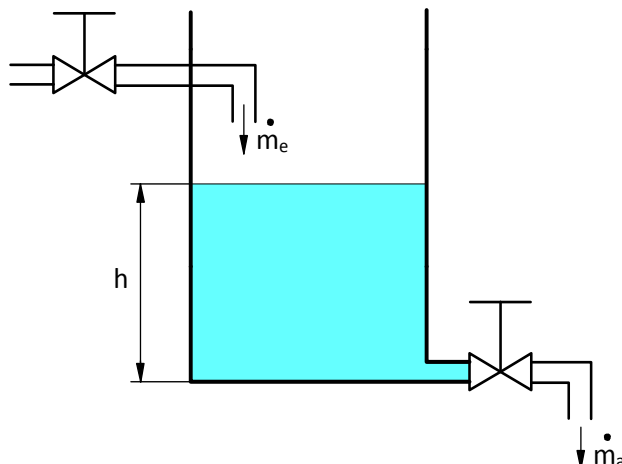
Kennart:

Ausgleichsantwort $q = \Delta y / \Delta x | t \Rightarrow$ unendlich

Vs...Streckenverstärkung

b. Strecken ohne Ausgleich:

Diese Strecken werden ausgangsseitig immer übersteuert und können daher ohne Regler nicht stabil betrieben werden. Dazu gehören integrale Strecken: Hier wird die Eingangsgröße aufintegriert



ma...abfließender Massenstrom

me...zufließender Massenstrom

h.....Füllhöhe

$\Delta m = m_e - m_a$

$\Delta m > 0$ Überlauf

$\Delta m < 0$ leer

Wird die Zuflussmenge nicht geregelt, so wird das System über kurz oder lang in die Aussteuergrenze gehen.

Alle Strecken mit I-Anteil (I, IT1, IT2,...PI,...)

c. mitgekoppelte Strecken:

Bsp.: Kernspaltungsprozess

5.1.2 Einschwingverhalten:

Beschreibt die unmittelbare Reaktion auf Eingangsgrößenänderungen unabhängig davon, welcher Zustand sich danach einstellt.

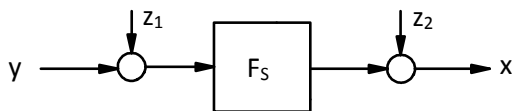
Zur Reglerdimensionierung muss zunächst das Langzeitverhalten der Strecke betrachtet werden, erst wenn dieses in Ordnung ist, kann noch das Einschwingverhalten optimiert werden.

5.2 Stationäres Verhalten von Regelkreisen

Für diese Betrachtungen kann die Strecke einer der Grundkategorien P, I oder D zugeordnet werden.

5.2.1 Langzeit P-Strecken:

a. ungeregelt:



$F_S = K_S$

$Z_1 \rightarrow \Delta X_1 = Z_1 \cdot K_S$

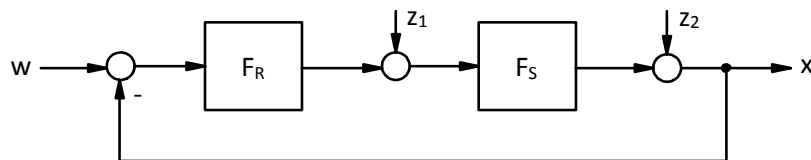
$Z_2 \rightarrow \Delta X_2 = Z_2$

$\Delta X_U = Z_1 \cdot K_S + Z_2$

Formel 5.2—1

b. geregelt mit P-Regler:

$F_R = k_P$



$w = 0$

$\Delta x_R = (z_1 - \Delta x_R \cdot k_R) \cdot k_S + z_2 = z_1 \cdot k_S - \Delta x_R \cdot k_R \cdot k_S + z_2$

$\Delta x_R \cdot (1 + k_R \cdot k_S) = z_1 \cdot k_S + z_2$

$\Delta x_R = \frac{z_1 \cdot k_S + z_2}{1 + k_R \cdot k_S} = \frac{\Delta x_U}{1 + k_R \cdot k_S}$

d.h. die Regelabweichung wird kleiner und zwar so mehr, je größer die Verstärkung des Reglers k_R ist.

$\frac{\Delta x_R}{\Delta x_U} = \frac{1}{1 + k_R \cdot k_S} = r$ r... Regelfaktor

Der kleinste Regelfaktor ist durch die maximale Reglerverstärkung k_R gegeben. Welche wiederum von der Aussteuergrenze der Strecke abhängt. Daher weist der P-Regler immer eine bleibende Regelabweichung auf, die er nicht ausregeln kann.

c. geregelt mit I-Regler:

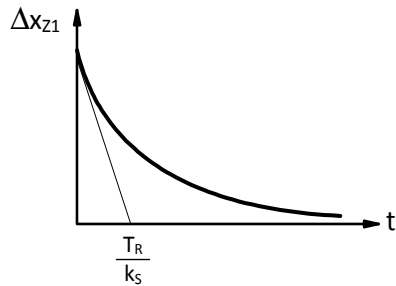
$F_R = \frac{1}{T_R \cdot s}$

Störfrequenzgang

$$F_{Z1} = \frac{k_S}{1 + \frac{1}{T_R \cdot s} \cdot k_S} = \frac{T_R \cdot s}{1 + \frac{T_R}{k_S} \cdot s} \quad \text{..... DT}_1\text{-Verhalten}$$

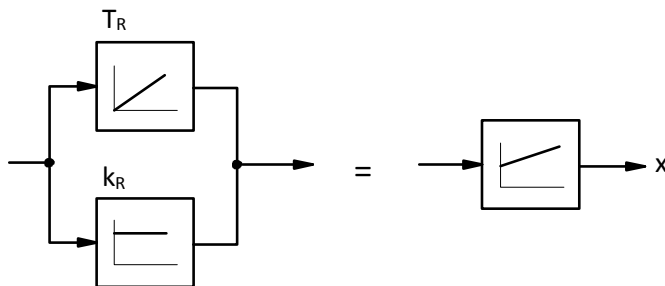
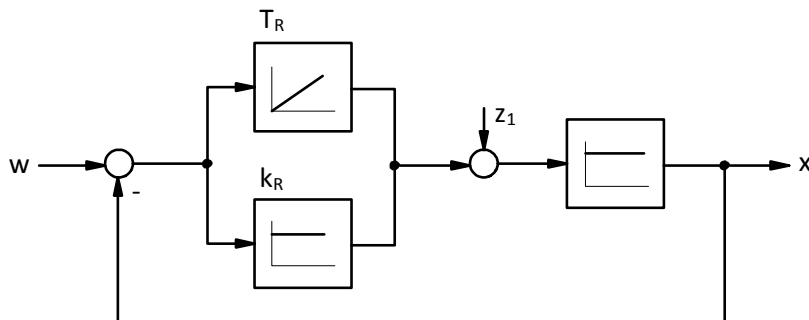
Sprungantwort

$$\Delta X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{T_R \cdot s}{1 + \frac{T_R}{k_S} \cdot s} \quad \bullet \circ \Delta X(s) = k_S \cdot e^{-\frac{t}{T_R} \cdot k_S}$$



Regelabweichungen werden vollständig ausgeregelt, je kleiner die Zeitkonstante des Reglers T_R desto schneller, jedoch reagiert der I-Regler im ersten Moment überhaupt nicht, d.h. die Anfangsabweichung ist genauso groß, wie bei der ungeregelten Strecke. Daher wird der I-Regler nur in Kombination mit einem P-Regler verwendet.

d. geregelt mit PI-Regler

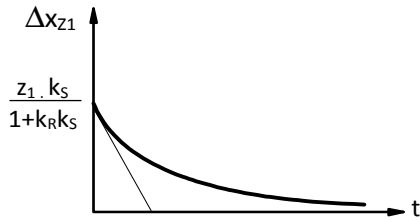


$$F_{Z1} = \frac{k_S}{1 + k_S \cdot \left(k_R + \frac{1}{T_R \cdot s} \right)} = \frac{T_R \cdot k_S \cdot s}{T_R \cdot s + k_R \cdot k_S \cdot T_R \cdot s + k_S} = \frac{T_R \cdot s}{1 + \left(\frac{1}{k_S} + k_R \right) \cdot T_R \cdot s}$$

=> DT1-Verhalten

Sprungantwort:

$$\Delta X_{Z1}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{T_R \cdot s}{1 + \left(\frac{1}{k_S} + k_R \right) \cdot T_R \cdot s} \quad \bullet \circ \Delta X_{Z1}(s) = \frac{k_S}{1 + k_S \cdot k_R} \cdot e^{-\frac{t}{T_R \cdot \left(\frac{1}{k_S} + k_R \right)}}$$



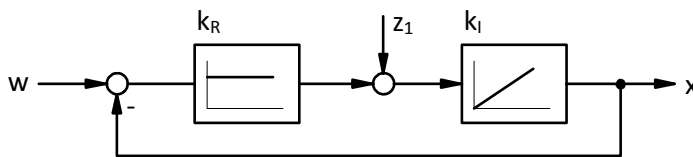
Die Anfangsabweichung wird um den Regelfaktor des Proportionalreglers verkleinert, es bleibt ebenfalls keine bleibende Abweichung über.

5.2.2 Langzeit I-Strecke

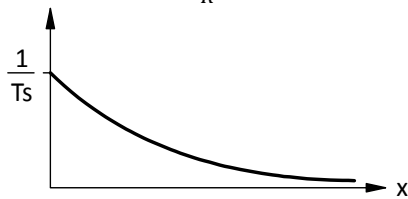
$$F_S = \frac{1}{T_S \cdot s}$$

a. mit P-Regler

$$F_R = k_R$$



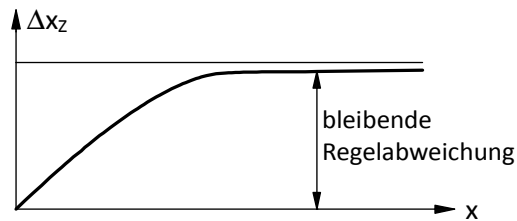
$$F_{Z1} = \frac{1}{k_R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T}{k_R} \cdot s} = \frac{1}{k_R + T \cdot s} \quad \bullet \circ \frac{1}{T \cdot s} \cdot e^{-\frac{k_R}{T \cdot s} t}$$



a. I-Regler:

Bsp.:

$$F_{Z1} = \frac{1}{k_R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T}{k_R} \cdot s}$$

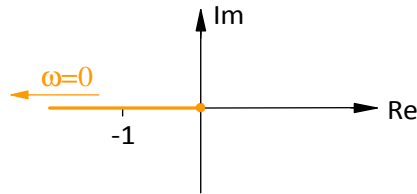


$$\Delta x_z(t) = \frac{1}{k_R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \cdot k_R}{T_S}} \right)$$

$$F_R = \frac{1}{T_R \cdot s} \quad \text{PT}_1 \text{ Verhalten}$$

Stabilitätsuntersuchung

$$F_0 = \frac{1}{T_R \cdot s} \cdot \frac{1}{T_S \cdot s} = \frac{1}{T_R \cdot T_S \cdot s^2} = \frac{1}{T_R \cdot T_S \cdot \omega^2}$$



c. PI-Regler

$$F_R = k_R + \frac{1}{T_R \cdot s}$$

$$F_S = \frac{1}{T_S \cdot s}$$

$$F_Z = \frac{\frac{1}{T_S \cdot s}}{1 + \frac{1}{T_S \cdot s} \cdot \left(k_R + \frac{1}{T_R \cdot s}\right)} = \frac{1}{T_S \cdot s + k_R + \frac{1}{T_R \cdot s}} = \frac{T_R \cdot s}{T_R \cdot T_S \cdot s^2 + T_R \cdot s \cdot k_R + 1}$$

..... DT₂-Verhalten

Aus dem DT₂ Verhalten folgt:

$$T_0 = \sqrt{T_R \cdot T_S}$$

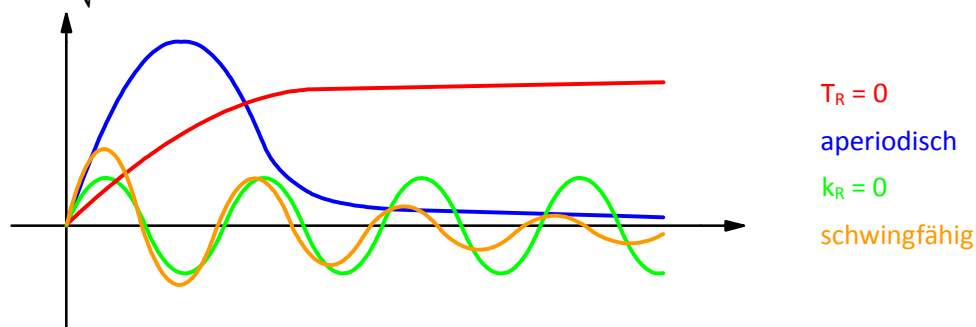
$$\vartheta = \frac{T_R \cdot k_R}{2 \cdot T_0} = \frac{T_R \cdot k_R}{2 \cdot \sqrt{T_R \cdot T_S}} = \sqrt{\frac{T_R \cdot k_R^2}{4 \cdot T_S}}$$

Durch die Wahl der Reglerparameter kann das Verhalten des Regelkreises beeinflusst werden. z.B. aperiodischer Grenzfall $\vartheta = 1$ gewählt.

$$\Rightarrow 4 \cdot T_S = T_R \cdot k_R^2 \Rightarrow k_R = \sqrt{\frac{4 \cdot T_S}{T_R}}$$

T_R und k_R sind nun nicht mehr unabhängig voneinander einstellbar, wird

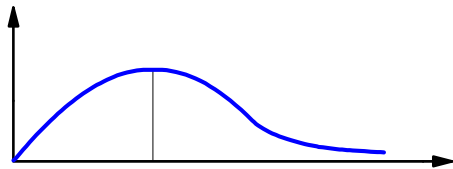
$$k_R < \sqrt{\frac{4 \cdot T_S}{T_R}} \Rightarrow \text{schwingfähig, ansonsten kriechfähig}$$



Sprungantwort:

$$\Delta X_Z(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{T_R \cdot s}{1 + T_R \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{4 \cdot T_S}{T_R}}}_{2T_0} \cdot s + \underbrace{T_S \cdot T_R}_{T_0^2} \cdot s^2} = \frac{T_R}{1 + 2T_0 \cdot s + T_0^2 \cdot s^2} = \frac{T_R}{(1 + T_0 \cdot s)^2}$$

$$\Delta X_Z(s) \bullet \circ \frac{T_R}{T_0^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_0}}$$



Berechnung des Maximums (Extremwertberechnung):

$$\frac{d x_Z(t)}{d t} = \frac{T_R}{T_0^2} \cdot \left(1 \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} - \frac{t}{T_0} \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} \right) = \frac{T_R}{T_0^2} \cdot \left(1 - \frac{t}{T_0} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_0}} = 0$$

$$1 - \frac{t}{T_0} = 0 \Rightarrow t = T_0 \dots \dots \text{Maximum}$$

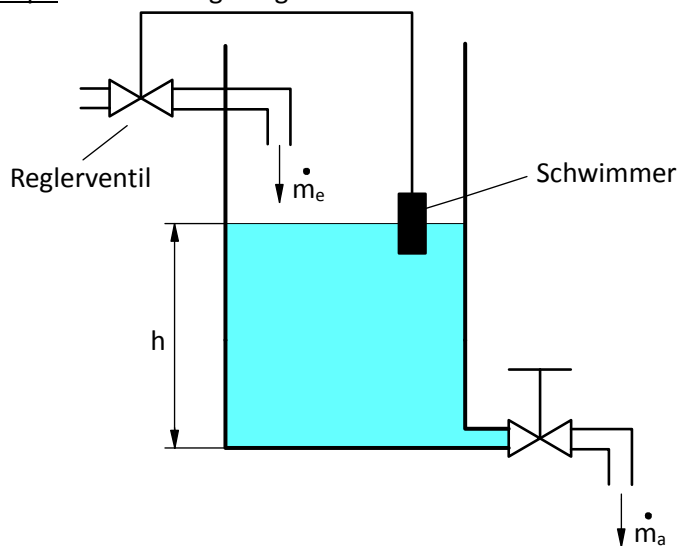
Je kleiner T_R (desto stärker der I-Anteil) desto früher tritt das Maximum auf.

Wie groß ist das Maximum?

$$\Delta X_{Zmax}(t = T_0) = \frac{T_R}{T_0^2} \cdot T_0 \cdot e^{-\frac{T_0}{T_0}} = \frac{T_R}{T_0} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot T_R \cdot \sqrt{T_R \cdot T_S} = \frac{1}{e} \cdot \sqrt{\frac{T_R}{T_S}}$$

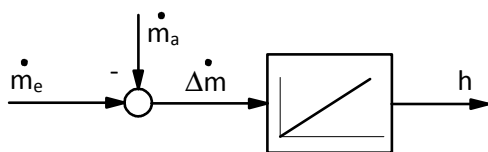
je stärker der I-Anteil auftritt, desto kleiner wird auch die maximale Abweichung, allerdings wird dadurch der Regelkreis auch instabiler. Um die Stabilität wieder zu gewinnen muss die Proportionalverstärkung erhöht werden. Die Maximale Größe der Reglerparameter ist jedoch durch die Aussteuergröße des Systems bestimmt.

Bsp.: Füllstandsregelung:



m_a ...abfließender Massenstrom
 m_e ...zufließender Massenstrom
 hFüllhöhe

Streckenmodell:



Willkürliches Verändern von m_a entspricht einer Störung daher:

- $m_a = z$
- $m_e = y$
- $h_{ist} = x$
- $h_{soll} = w$

Zusammenhang Massenänderung und Füllhöhe

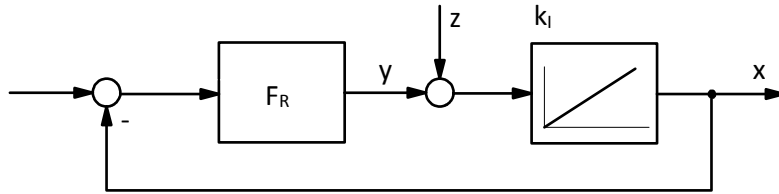
$$m = \rho \cdot V =$$

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h \Rightarrow h = \frac{m}{A \cdot \rho}, \quad \text{wobei } m = \Delta \dot{m}$$

$$\Rightarrow \dot{h} = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \Delta \dot{m}, \quad \Delta \dot{m} = \dot{m}_E - \dot{m}_A$$

$$h = \underbrace{\frac{1}{\rho \cdot A}}_{KI} \int \Delta \dot{m} dt$$

Regekreis



=> PI-Regler gewählt

$$F_R = k_R \cdot \left(1 + \frac{1}{T_N \cdot s} \right)$$

Untersuchung der Stabilität $\varepsilon = \infty, \delta$ abhängig von $k_R, T_N \Rightarrow$ stabil

Störfrequenzgang:

$$F_Z = - \frac{\frac{k_I}{s}}{1 + \frac{k_I}{s} \cdot k_R \cdot \left(1 + \frac{1}{T_N \cdot s} \right)} = - \frac{\frac{k_I}{s}}{1 + \frac{k_I \cdot k_R}{s} + \frac{k_I \cdot k_R}{T_N \cdot s^2}} = - \frac{\frac{k_I}{s}}{\frac{T_N \cdot s^2 + k_I \cdot k_R \cdot T_N \cdot s + k_I \cdot k_R}{T_N \cdot s^2}}$$

$$F_Z = - \frac{k_I \cdot T_N \cdot s}{s \cdot (T_N \cdot s^2 + k_I \cdot k_R \cdot T_N \cdot s + k_I \cdot k_R)} = - \frac{k_I \cdot T_N \cdot s}{T_N \cdot s^2 + k_I \cdot k_R \cdot T_N \cdot s + k_I \cdot k_R}$$

$$F_Z = - \underbrace{\frac{T_N}{k_R}}_{\text{Physikalischer Vorfaktor}} \cdot \underbrace{\frac{s}{1 + T_N \cdot s + \frac{T_N \cdot s^2}{k_I \cdot k_R}}}_{\text{DT2}}$$

Physikalischer Vorfaktor DT2

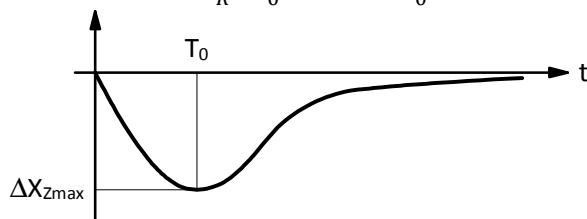
Koeff Vgl:

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot \vartheta \cdot T_0 &= T_N \\ T_0^2 &= \frac{T_N}{k_I \cdot k_R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} T_0 &= \sqrt{\frac{T_N}{k_I \cdot k_R}} \\ \vartheta &= \sqrt{\frac{T_N \cdot k_I \cdot k_R}{4}} \end{aligned}$$

gewählt aperiodischer Grenzfall: d.h. $\vartheta = 1$

$$T_N = \frac{4}{k_I \cdot k_R} \Rightarrow T_0 = \frac{2}{k_I \cdot k_R}$$

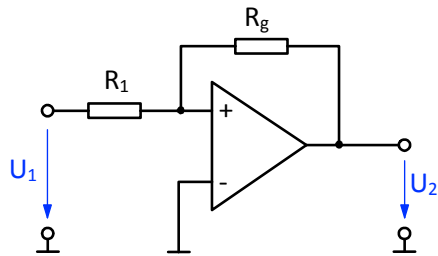
$$\Delta X_Z(s) = \frac{\dot{m}_{a0}}{s} \cdot \frac{T_N}{k_R \cdot T_0^2} \cdot \frac{s \cdot T_0^2}{1 + s \cdot T_0^2} \quad \bullet \circ \Delta x_Z(t) = -\dot{m}_{a0} \cdot k_I \cdot e^{-\frac{k_R \cdot k_I}{2} t}$$



6 Reglertypen

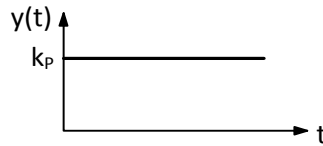
6.1 P-Regler

Schaltung:

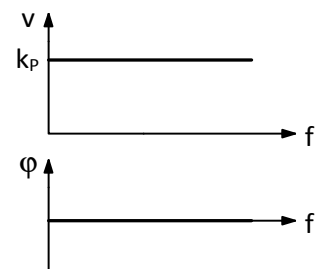


$$y(t) = k_P \cdot x(t) \quad k_P = -\frac{R_g}{R_1}$$

Sprungantwort:



Bodediagramm:

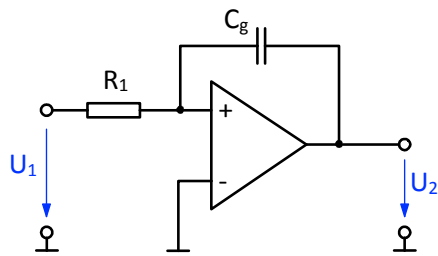


Eigenschaften:

Verursacht stets eine bleibende Regelabweichung. Dies ist besonders problematisch bei Folgeregelungen, bei denen mehrere Regelkreise synchron zueinander geregelt werden sollen. Schleppfehler.

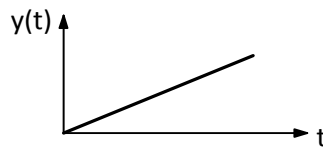
6.2 I-Regler

Schaltung:

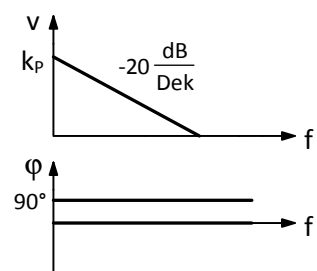


$$y(t) = \int x(t) dt$$

Sprungantwort:



Bodediagramm:

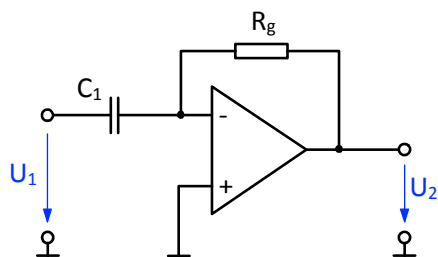


Eigenschaften:

- Bei strecken mit Ausgleich, tritt keine bleibende Regelabweichung auf.
- Strecken ohne Ausgleich sind nicht stabil regelbar.
- Reagiert bei auftretenden Störungen sehr langsam. Daher nur in Kombination mit P-Regler verwendet (PI-Regler).

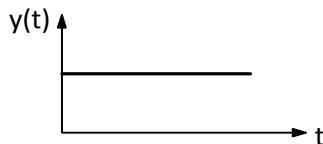
6.3 D-Regler

Schaltung:

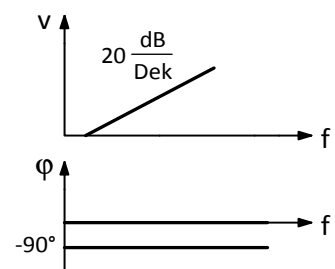


$$y(t) = \frac{dx}{dt}$$

Anstiegsantwort:



Bodediagramm:

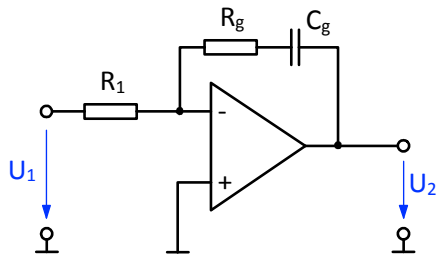


Eigenschaften:

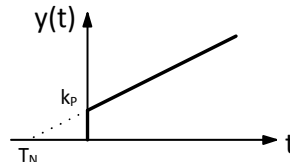
- Reine D- Regler sind nicht brauchbar, da sie auf konstante Regelabweichungen nicht reagieren. Daher immer in Kombination mit einem P- oder PI- Regler. Durch die positive Phasendrehung verbessert er die Stabilität durch erhöhen der anderen Regelparameter die Regelgüte wesentlich verbessert werden.
- ein zu hoher D- Anteil bewirkt eine übermäßige Verstärkung von Störungen und Rauschen und führt daher zu Unruhen im Regelkreis (hochfrequentes Schwingen) Sprungantwort

6.4 PI-Regler

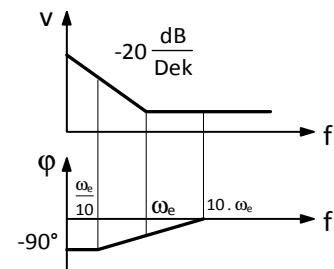
Schaltung:



Sprungantwort:



Bodediagramm:



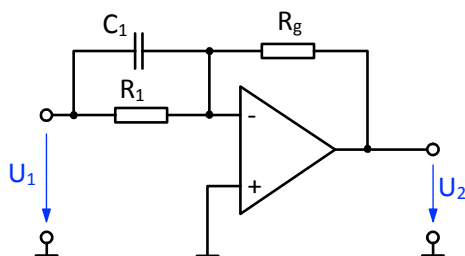
$$y(t) = k_p \cdot x(t) + k_I \cdot \int x(t) dt \quad k_p = -\frac{R_g}{R_1} = k_I \cdot T_N \quad T_N = R_g \cdot C_g$$

Eigenschaften:

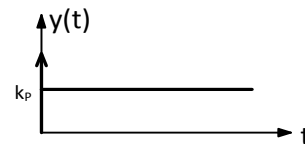
- wirkt wie ein I-Regler, der um T_N zuvor mit dem Regeln begonnen hat.
- im stabilen Regelkreisen keine bleibende Regelabweichung
- bei Tiefpassstrecken schlechtere Stabilität als ein P- Regler mit gleichem k_p .

6.5 PD-Regler

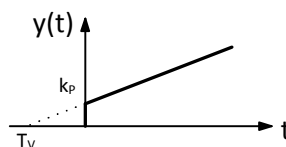
Schaltung:



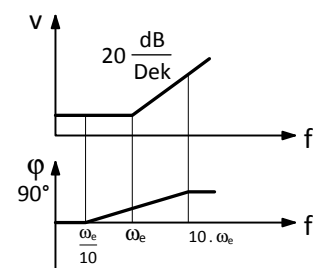
Sprungantwort:



Anstiegsantwort:



Bodediagramm:



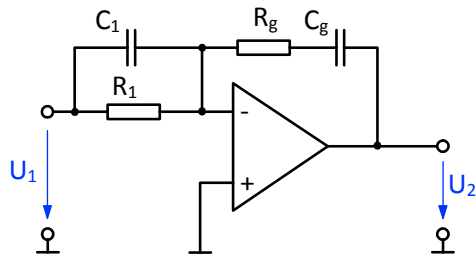
$$y(t) = k_p \cdot x(t) + k_D \cdot \frac{dx}{dt} \quad k_p = -\frac{R_g}{R_1} = \frac{k_D}{T_V} \quad T_V = R_1 \cdot C_1$$

Eigenschaften:

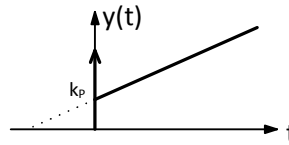
- Ein PD- Regler wirkt wie ein D-Regler, der bereits um T_V vor Auftreten der Abweichung zu Regeln begonnen hat, d.h. der D- Anteil beschleunigt den P-Regler.
- im stabilen Regelkreisen keine bleibende Regelabweichung
- Bei gleichem k_p ist der PD- Regler stabiler als ein P- Regler, da er eine positive Phasendrehung verursacht. Andererseits kann bei gleicher Stabilität die Regelgüte verbessert werden.

6.6 PID-Regler

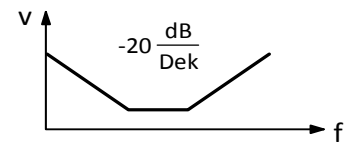
Schaltung:



Sprungantwort:



Bodediagramm:



$$y(t) = k_p \cdot x(t) + k_D \cdot \frac{dx}{dt} + k_I \cdot \int x(t) dt$$

$$k_p = -\frac{R_g}{R_1} = \frac{k_D}{T_V} = k_I \cdot T_N$$

$$T_V = R_1 \cdot C_1$$

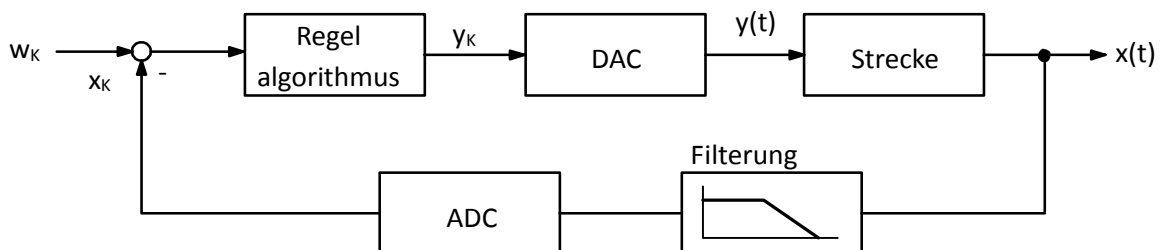
$$T_N = R_g \cdot C_g$$

Eigenschaften:

- Liefert für die meisten regeltechnischen Aufgaben ausreichend gute Ergebnisse.
- In der Praxis wird für den D- Anteil meist ein DT1 – Verhalten gewählt

7 Digitale Regler

- Vorteile gegenüber analogen Reglern:
 - komplexere Regelalgorithmen möglich
 - digital parametrierbar, daher auch automatisierbar
 - drifffrei und sehr hohe Auflösung bis zu 16bit
 - digitale Kopplung (störungsunempfindlich)
- Nachteile gegenüber analogen Reglern:
 - digitale Regler sind Abtastregler, daher Informationsverlust zwischen den Abtastzeitpunkten, daher muss die Abtastzeit T_0 an den Prozess angepasst werden. Dies kann bei einem Prozess mit mehreren Abtastzeitpunkten zu sehr hoher Rechenleistung führen, z.B. Drehzahl und Stromregelung von Gleichstrommotoren
 - hoher Hardwareaufwand => heutzutage kein wirkliches Problem mehr
- Prinzipieller Aufbau eines digitalen Regelkreises:



w_k	Führungsgröße digitaler Wert
x_k	Regelgrößen digitaler Wert
y_k	Stellgröße digitaler Wert
$y(t)$	Stellgröße analog
$x(t)$	Regelgröße analog

Der Regelalgorithmus wird mittels Software realisiert. Nur für extrem schnelle Sonderanwendungen kann ein fest verdrahtetes Rechenwerk umgesetzt werden (FPGA).

Beim Entwurf sind folgende Schritte notwendig:

- Entwurf des Algorithmus (PID,
- Wahl der Abtastzeit (von der Geschwindigkeit des Prozess abhängig)

Prozess	Abtastzeit
Strom –Drehzahlregelung bei Stromrichtern für Elektromotoren	<1ms
Lageregelung für Servomotoren	1-10ms
Hydraulische und pneumatische Steuerung	10-100ms
Chemische Prozesse	~1s
Thermische Prozesse	>1min

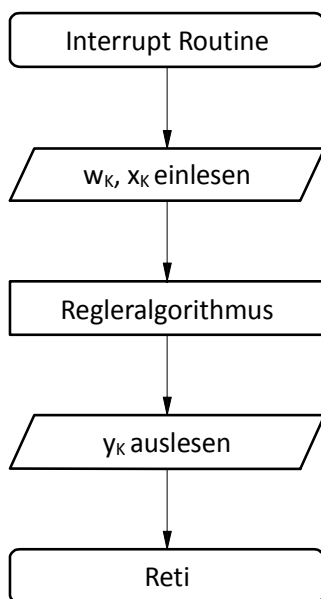
- Wahl der Hardwarekomponenten (hängt von der Komplexität des Algorithmus und der Abtastzeit ab. Programmlaufzeit < T_{Abtast} . $T_{\text{Abtast}} \leq 1\text{ms}$ meist nur mit Signalprozessoren (DSB) möglich. Weiters ist noch zu überlegen ob die Berechnungen integerfix oder Gleitkommaarithmetik berechnet werden sollen.

Prozessorleistung = Komplexität x $1/T_{\text{Abtast}}$

- Implementierung des Algorithmus: Je nach geforderter Geschwindigkeit in Assembler oder einer höheren Programmiersprache (Visual C) oder bei SPS Steuerungen in der entsprechenden SPS Steuersprache
- Parametrierung des Reglers: Ist mittels geeigneter Software zum Teil automatisierbar

Ablauf des Reglerprogrammes:

Regleralgorithmus muss pro Abtastperiode 1mal durchlaufen werden, daher sind Reglerprogramme meist Interruptroutinen die von einem Timer gesteuert werden.

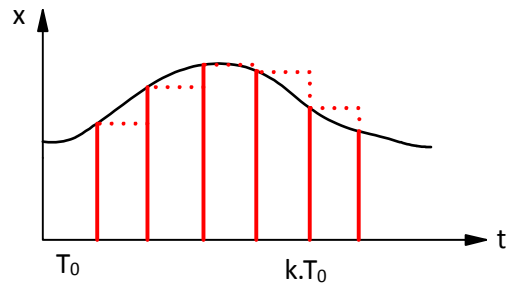


7.1 Realisierung analoger Regler als digitaler Regler

Aus einem zeitkontinuierlichen Signal wird ein zeitdiskretes Signal

$$x(t) \implies x(k)$$

$$t \implies k \cdot T_0 \quad k \in \mathbb{N}$$



Differentialgleichung \implies Differenzgleichung

P-Anteil

$$y(k) = k_p \cdot x(k)$$

Formel 7.1–1

D-Anteil

$$y(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_0}$$

Formel 7.1–2

I-Anteil

$$y(k) = k_I \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x(i) \cdot T_0$$

Rechteckintegration

Formel 7.1–3

$$y(k) = k_I \cdot \sum_{i=0}^k x(i) \cdot T_0$$

$$y(k) = k_I \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x(i) + x(i-1)}{2} \cdot T_0$$

Trapezintegration

Formel 7.1–4

Programmieransatz:

$$y(k) = k_I \cdot T_0 \cdot \sum_{i=1}^k x(i)$$

$$y(k-1) = k_I \cdot T_0 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} x(i)$$

$$y(k) - y(k-1) = k_I \cdot T_0 \cdot x(k)$$

$$\implies y(k) = y(k-1) + k_I \cdot T_0 \cdot x(k)$$

Aus diesen Grundfunktionen lassen sich die Standardregler P, PI, PID zusammensetzen.

- Digitale Nachbildung eines PID Reglers:

Differentialgleichung:

$$y(t) = k_p \cdot \left(x(t) + T_V \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{T_N} \cdot \int_0^{t'} x(t) dt \right)$$

$$y(k) = k_p \cdot \left(x(k) + T_V \cdot \frac{x(k) - x(k-1)}{T_0} + \frac{T_0}{T_N} \cdot \sum_{i=1}^k x(i) \right)$$

$$y(k-1) = k_p \cdot \left(x(k-1) + T_V \cdot \frac{x(k-1) - x(k-2)}{T_0} + \frac{T_0}{T_N} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} x(i) \right)$$

$$y(k) - y(k-1) = k_p \cdot \left(x(k) - x(k-1) + \frac{T_V}{T_0} \cdot (x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)) + \frac{T_0}{T_N} \cdot x(k) \right)$$

$$y(k) = y(k-1) + x(k) \cdot \underbrace{\left[k_p \cdot \left(1 + \frac{T_V}{T_0} + \frac{T_0}{T_N} \right) \right]}_{b_0} + x(k-1) \cdot \underbrace{\left[k_p \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{T_V}{T_0} \right) \right]}_{b_1} + x(k-2) \cdot \underbrace{\left[k_p \cdot \frac{T_V}{T_0} \right]}_{b_2}$$

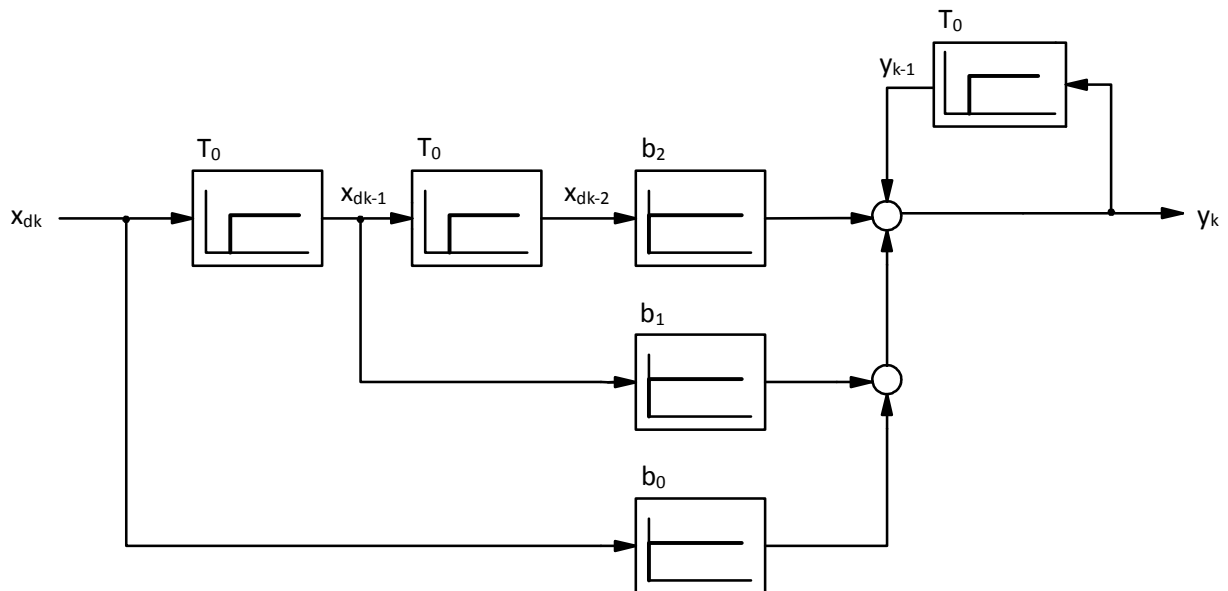
$$y(k) = y(k-1) + x(k) \cdot b_0 + x(k-1) \cdot b_1 + x(k-2) \cdot b_2$$

$$b_0 = k_p \cdot \left(1 + \frac{T_V}{T_0} + \frac{T_0}{T_N} \right)$$

$$b_1 = k_p \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{T_V}{T_0} \right)$$

$$b_2 = k_p \cdot \frac{T_V}{T_0}$$

Signalflussplan:



Bei digitalen Signalflussplänen gibt es nur mehr 2 Arten von Übertragungsblöcken, nämlich Multiplikation mit Koeffizienten und Zeitverzögerungen um 1 Abtastschritt (T_0).

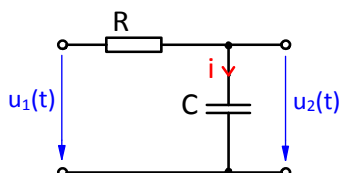
Beim PI Regler wird $T_V = 0$

Beim PD Regler wird $T_N = \infty$

Diese Gleichungsstruktur lässt sich sehr effizient in Assembler realisieren. Signalprozessoren benutzen hierzu eine speziell angepasste Hardwarearchitektur, die es erlaubt mit einem Befehl Werte mit Koeffizienten zu multiplizieren und in einem Akkumulator aufzusummieren.

MAC Multiply and accumulate

- Digitale Nachbildung eines PT1 (RC-Tiefpass):



$$u_2(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = \frac{1}{C} \cdot \int \frac{u(t)}{R} dt = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \int u_1(t) - u_2(t) dt$$

$$\dot{u}_2(t) = \frac{1}{\tau} \cdot (u_1(t) - u_2(t))$$

$$u_1(t) - u_2(t) = \dot{u}_2(t) \cdot \tau$$

Differentialgleichung:

$$u_2(t) = u_1(t) - \dot{u}_2(t) \cdot \tau$$

Differenzengleichung:

$$u_2(k) = u_1(k) - \tau \cdot \frac{u_2(k) - u_2(k-1)}{T_0}$$

$$u_2(k) \cdot T_0 = u_1(k) \cdot T_0 - \tau \cdot u_2(k) + \tau \cdot u_2(k-1)$$

$$u_2(k) \cdot (T_0 + \tau) = u_1(k) \cdot T_0 + \tau \cdot u_2(k-1)$$

$$u_2(k) = u_1(k) \cdot \left[\frac{T_0}{T_0 + \tau} \right] + u_2(k-1) \cdot \left[\frac{\tau}{T_0 + \tau} \right]$$

$$u_2(k) = u_1(k) \cdot b_0 + u_2(k-1) \cdot a_1$$

$$b_0 = \frac{T_0}{T_0 + \tau} \quad \text{Koeffizienten der Eingangsgröße}$$

$$a_1 = \frac{\tau}{T_0 + \tau} \quad \text{Koeffizienten der Ausgangsgröße}$$

beachte:

$$b_0 + a_1 = \frac{T_0}{T_0 + \tau} + \frac{\tau}{T_0 + \tau} = 1$$

Bei Langzeit P-Strecken ist die Summe der Koeffizienten gleich der Proportionalverstärkung (hier = 1)

Bsp.: PT1-Strecke mit Digitalregler realisiert $\tau = 1 \text{ sec}$

$$T_0 = 0,5 \text{ sec}$$

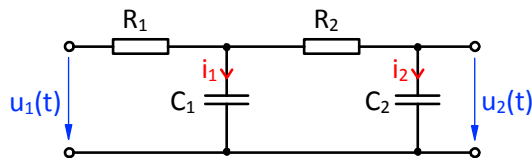
$$\Rightarrow b_0 = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

$$T_0 = 0,5 \text{ sec}$$

$$\Rightarrow b_0 = 0,17, \quad a_1 = 0,83$$

Die Abtastzeit muss laut Abtasttheorem kleiner gleich der Hälfte der kleinsten im System vorkommenden Zeitkonstante sein. Je kürzer die Abtastzeit gewählt wird, desto feiner ist die Auflösung. Gleichzeitig werden aber die Koeffizienten unsymmetrischer wodurch es zu numerischen Fehlern bei der Berechnung kommt. Daher wird in der Praxis die Abtastzeit zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$ der kleinsten System-Zeitkonstante gewählt.

- Digitale Nachbildung eines PT2:



Differentialgleichung:

$$y(t) = \tau^2 \cdot \ddot{x}(t) + 2\vartheta \cdot \tau \cdot \dot{x}(t) + x(t)$$

Differenzengleichung:

$$y(t) \longrightarrow y(k)$$

$$x(t) \longrightarrow x(k)$$

$$\dot{x}(t) \longrightarrow \frac{x(k) - x(k-1)}{T_0}$$

$$\ddot{x}(t) \longrightarrow \frac{\frac{x(k) - x(k-1)}{T_0} - \frac{x(k-1) - x(k-2)}{T_0}}{T_0} = \frac{x(k) - 2 \cdot x(k-1) + x(k-2)}{T_0^2}$$

$$y(k) = \tau^2 \cdot \frac{x(k) - 2 \cdot x(k-1) + x(k-2)}{T_0^2} + 2\vartheta \cdot \tau \cdot \frac{x(k) - x(k-1)}{T_0} + x(k)$$

$$y(k) = x(k) \cdot \left(\frac{\tau^2}{T_0^2} + \frac{2\vartheta \cdot \tau}{T_0} + 1 \right) - x(k-1) \cdot \left(\frac{2\tau^2}{T_0^2} + \frac{2\vartheta \cdot \tau}{T_0} \right) + x(k-2) \cdot \frac{\tau^2}{T_0^2}$$

$$y(k) = x(k) \cdot \left(\frac{\tau^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + T_0^2}{T_0^2} \right) - x(k-1) \cdot \left(\frac{2\tau^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0}{T_0^2} \right) + x(k-2) \cdot \frac{\tau^2}{T_0^2}$$

$$x(k) = \frac{y(k) + x(k-1) \cdot \left(\frac{2\tau^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0}{T_0^2} \right) - x(k-2) \cdot \frac{\tau^2}{T_0^2}}{\frac{\tau^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + T_0^2}{T_0^2}}$$

$$x(k) = \frac{y(k) \cdot T_0^2 + x(k-1) \cdot (2\tau^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0) - x(k-2) \cdot \tau^2}{T_0^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + \tau^2}$$

$$x(k) = y(k) \cdot \frac{T_0^2}{T_0^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + \tau^2} + x(k-1) \cdot \frac{(2\tau^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0)}{T_0^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + \tau^2} + x(k-2) \cdot \frac{-\tau^2}{T_0^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + \tau^2}$$

wobei:

$$b_0 = \frac{T_0^2}{T_0^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + \tau^2}$$

$$a_1 = \frac{(2\tau^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0)}{T_0^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + \tau^2}$$

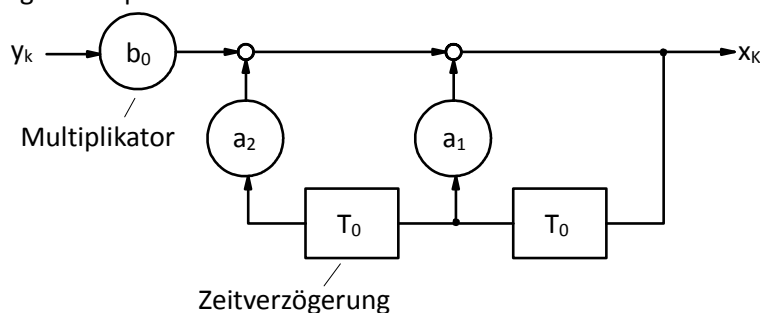
$$a_2 = -\frac{\tau^2}{T_0^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + \tau^2}$$

Probe:

Sie Summe der Koeffizienten muss 1 sein:

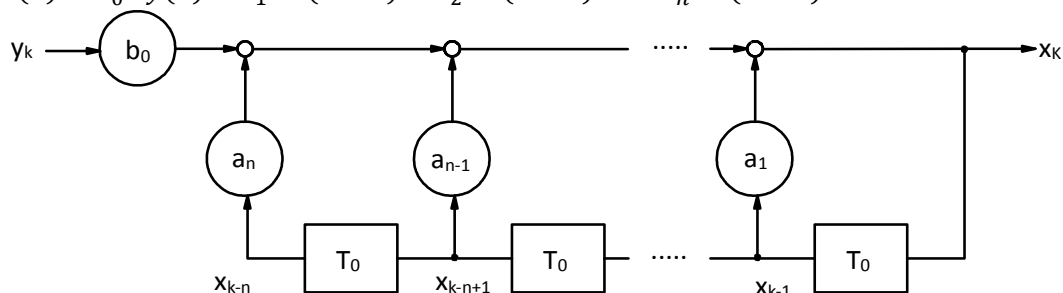
$$b_0 + a_1 + a_2 = \frac{T_0^2 + 2\tau^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 - \tau^2}{T_0^2 + 2\vartheta \cdot \tau \cdot T_0 + \tau^2} = 1 \Rightarrow \text{richtig}$$

Signalfussplan:



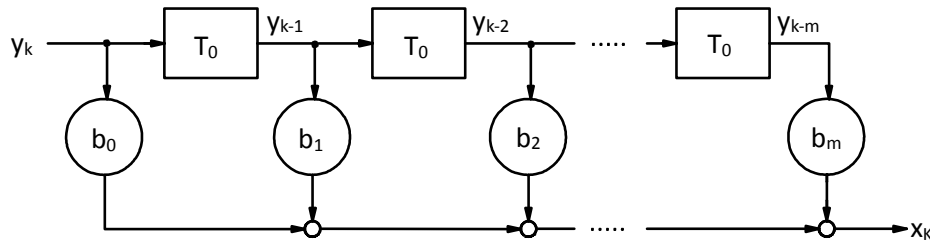
Allgemein lässt sich ein Algorithmus n-ter Ordnung so realisieren.

$$x(k) = b_0 \cdot y(k) + a_1 \cdot x(k-1) + a_2 \cdot x(k-2) + \dots + a_n \cdot x(k-n)$$



Verwendet man diesen Algorithmus als Filter, so spricht man von einem IIR-Filter (Infinite Impuls Response). Das heißt, ein Eingangsimpuls ist (theoretisch) nach unendlich großer Zeit abgeklungen. Alle analogen Filter sind IIR-Filter. Durch die Rückkopplung können diese Filter instabil werden.

Gegenstück dazu sind FIR-Filter (Finite Impuls Response)



FIR-Filter erzeugen die Ausgangsgröße durch eine gewichtete Mittelwertbildung über die letzten m Eingangswerte (moving average)

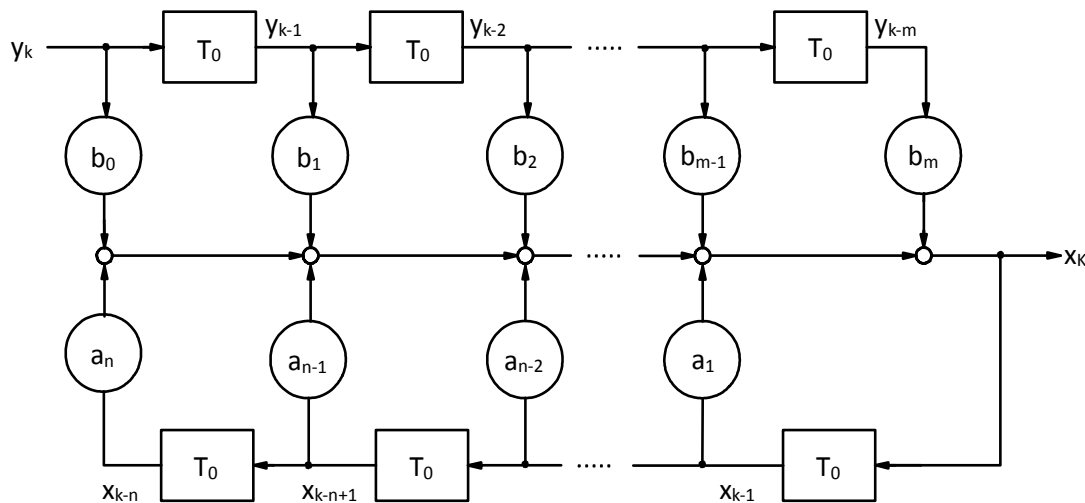
$$\sum_{i=0}^m b_i = k_p \quad \text{Proportionalverstärkung meistens} = 1$$

Bsp.: FIR-Filter 2ter Ordnung

$$b_0 = b_1 = b_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x(k) = \frac{y(k) + y(k-1) + y(k-2)}{3}$$

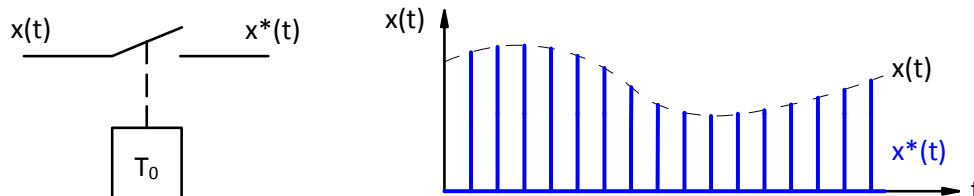
Da FIR-Filter keine Rückkopplung besitzen können sie nicht instabil werden, sie besitzen kein analoges Gegenstück.

Es können auch beide Filtertypen kombiniert werden



7.2 Z - Transformation

Die bisher verwendete Methode erlaubt es nur Differenzialgleichungen in Differenzgleichungen umzubauen und so digitale Filter und Regler zu realisieren. Beim Reglerentwurf benötigt man statt Differenzialgleichungen komplexe Übertragungsfunktionen. Diese erhält man bei analogen Systemen mit der Laplacetransformation. Um digitale Regler entwerfen zu können, benötigt man ebenfalls eine Transformation, die jetzt vom diskreten Zeitbereich in den Frequenzbereich führt.

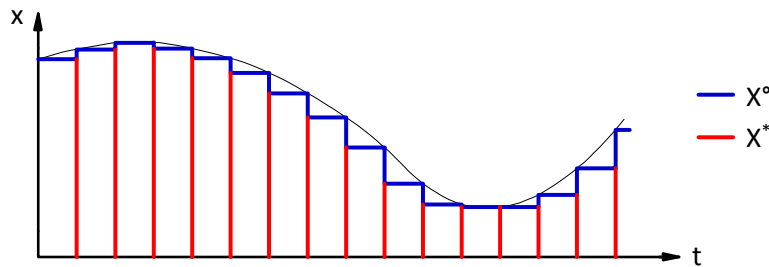


$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot \delta(t - k \cdot T_0)$$

Laplace-Transformation (Verschiebungssatz für Delta Funktion (Kronecker))

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot 1 \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s}$$

mit Abtast-Halteglied (ZOH = Zero order holder)



$$x^\circ(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot [\varepsilon(t - k \cdot T_0) - \varepsilon(t - (k+1) \cdot T_0)]$$

$$X^\circ(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot \left[\frac{1}{s} \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-(k+1) \cdot T_0 \cdot s}}{e^{-k \cdot T_0 \cdot s} \cdot e^{T_0 \cdot s}} \right] = \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s} \cdot (1 - e^{-T_0 \cdot s})$$

$$X^\circ(s) = \frac{1 - e^{-T_0 \cdot s}}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s}$$

$$X^\circ(s) = \frac{1 - e^{-T_0 \cdot s}}{s} \cdot X^*(s) \quad \frac{1 - e^{-T_0 \cdot s}}{s} \quad \dots \dots \dots \quad \text{Übertragungsfunktion des Halteglieds}$$

Das abgetastete Signal hat immer die selbe Form $X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} [x(k) \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s}]$

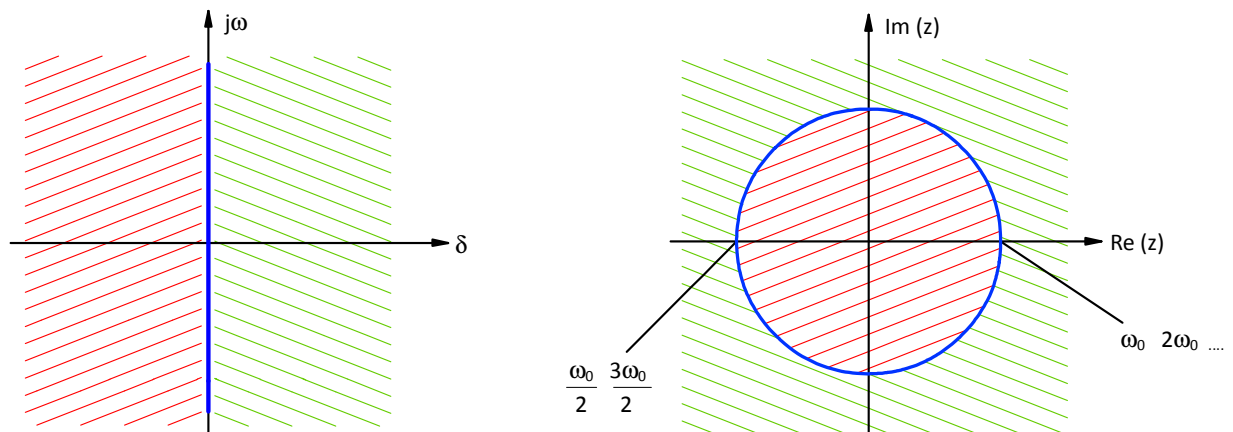
Durch die Abtastung entsteht somit eine Periodizität im Frequenzspektrum mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Für diesen Periodischen Term wird die Abkürzung: $z = e^{T_0 \cdot s}$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = Z(x(t))$$

Formel 7.2-1

Graphische Darstellung von s und z Transformation:



Horizontale Bewegungen in der s Ebene werden als radiale Bewegungen in der Z Ebene abgebildet.
 Vertikale Bewegungen in der S Ebene werden in der Z Ebene als Kreisförmige Bewegungen abgebildet.

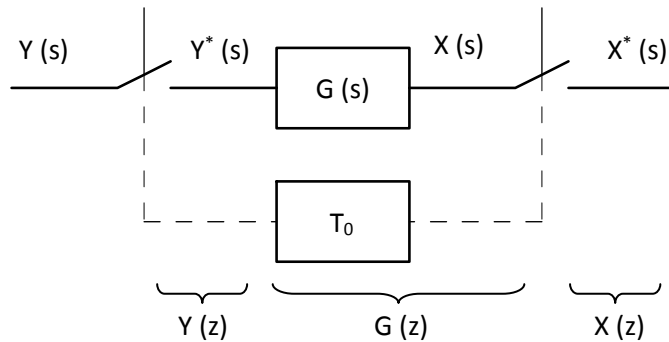
Daher erkennt man, dass bei der Z-Transformation nur Frequenzen bis $\frac{\omega_0}{2}$ dargestellt werden können.
 Darüber hinaus wiederholt sich das Spektrum => Beweis des Abtasttheorems.

$\delta < 0 \Rightarrow$ innerhalb des Einheitskreises

$\delta = 0 \Rightarrow$ auf EK

$\delta > 0 \Rightarrow$ außerhalb des EK

Übertragung abgetasteter Signale:



$$G^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) \cdot e^{-i \cdot T_0 \cdot s}$$

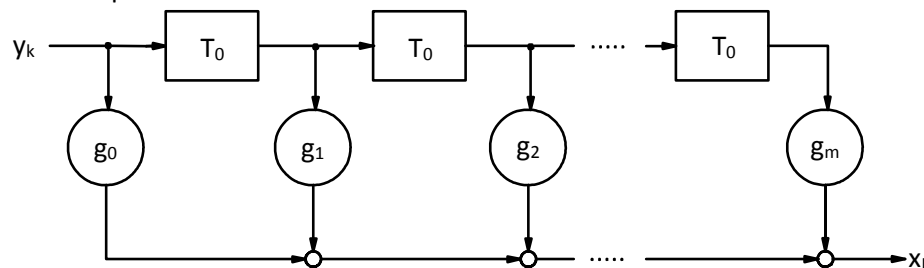
$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s}$$

Kann auch hier der Faltungssatz angewendet werden?

$$G^*(s) \cdot Y^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) \cdot e^{-i \cdot T_0 \cdot s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y(k) \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(i) \cdot e^{-i \cdot T_0 \cdot s} \cdot y(k) \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s}$$

$$G^*(s) \cdot Y^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(i) \cdot y(k) \cdot e^{-i \cdot T_0 \cdot s - k \cdot T_0 \cdot s}$$

Dies entspricht einem FIR Filter:



Index	Eingang	Ausgang
0	y_0	$y_0 \cdot g_0 = x_0$
1	y_1	$y_1 \cdot g_0 + y_0 \cdot g_1 = x_1$
2	y_2	$y_2 \cdot g_0 + y_1 \cdot g_1 + y_0 \cdot g_2 = x_2$
3	y_3	$y_3 \cdot g_0 + y_2 \cdot g_1 + y_1 \cdot g_2 + y_0 \cdot g_3 = x_3$
...

$$G^*(s) \cdot Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot e^{-k \cdot T_0 \cdot s}$$

$$X(z) = G(s) \cdot Y(s)$$

Formel 7.2-2

Dadurch gelten für abgetastete System dieselben Rechenregeln, wie für kontinuierliche. Die Z Transformation liefert allerdings nur eine Aussage zu den Abtastzeitpunkten. Beachte: dieser Berechnung liegt eine synchrone Abtastung zu Grunde. Dies kann in der Praxis nur näherungsweise erfüllt werden, da zwischen dem Einlesen von x und Ausgeben von y die Rechenzeiten des Prozessors liegt => Algorithmus optimieren.

7.2.1 Rechenregeln der Z Transformation

▪ Linearität:

$$n \cdot x(t) + m \cdot y(t) \quad n \cdot X(z) + m \cdot Y(z)$$

Formel 7.2-3

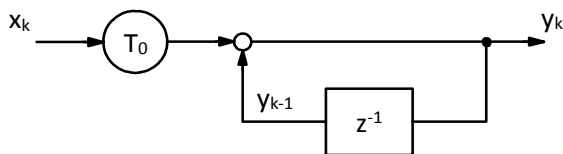
▪ Verschiebungssatz:

Bei abgetasteten Systemen sind nur mehr Verschiebungen um ganzzahlige Vielfache von T₀ möglich.

$$\begin{matrix} x(t) & X(z) \\ x(t - k \cdot T_0) & X(z) \cdot z^{-k} \end{matrix}$$

Formel 7.2-4

▪ Integrationsatz (Summationssatz):

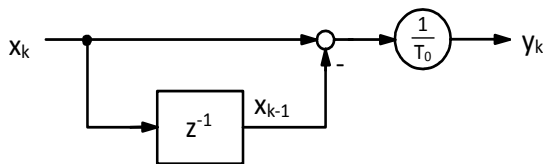


$$y(k) = x(k) \cdot T_0 \cdot \frac{1}{1 - 1 \cdot z^{-1}} = T_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

$$y(t) = \int_0^{t'} x(t) dt \quad X(z) \cdot \frac{T_0}{1 - \frac{1}{z}}$$

Formel 7.2-5

▪ Differentiationsatz:



$$y(t) = \frac{dx}{dt} \quad X(z) \cdot \frac{1 - \frac{1}{z}}{T_0}$$

Formel 7.2-6

beachte: die beiden Übertragungsfunktionen von Integrator und Differenzierer sind wieder invers zueinander.

Mit Hilfe des Differentiationsatzes der Z Transformation ist es nun möglich aus der DGL eines Systems die Z Übertragungsfunktion zu berechnen.

Bsp.: PT₂ Glied:

$$y(t) = \tau^2 \cdot \ddot{x}(t) + 2\vartheta\tau \cdot \dot{x}(t) + x(t)$$

$$Y(z) = \tau^2 \cdot X(z) \cdot \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_0}\right)^2 + 2\vartheta\tau \cdot X(z) \cdot \frac{1 - z^{-1}}{T_0} + X(z)$$

$$Y(z) = X(z) \cdot \left[\tau^2 \cdot \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_0} \right)^2 + 2\vartheta\tau \cdot \frac{1 - z^{-1}}{T_0} + 1 \right]$$

$$Y(z) = X(z) \cdot \left[\underbrace{\left(\frac{\tau^2 + 2\vartheta\tau \cdot T_0}{T_0^2} \right)}_{\frac{1}{b_0}} + \underbrace{\left(\frac{-2\tau \cdot (\tau + \vartheta \cdot T_0)}{T_0^2} \right)}_{-\frac{a_1}{b_0}} \cdot z^{-1} + \underbrace{\left(\frac{\tau^2}{T_0^2} \right)}_{-\frac{a_2}{b_0}} \cdot z^{-2} \right]$$

$$c_0 = \frac{1}{b_0} \quad c_1 = -\frac{a_1}{b_0} \quad c_2 = -\frac{a_2}{b_0}$$

$$F(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{1}{c_0 + c_1 \cdot z^{-1} + c_2 \cdot z^{-2}} \quad \text{wobei } c_0 \neq 0$$

Allgemein gilt für ein FIR Filter n-ter Ordnung:

$$F(z) = \frac{1}{c_0 + c_1 \cdot z^{-1} + \dots + c_n \cdot z^{-n}}$$

Formel 7.2—7

Je höher n, desto mehr berücksichtigt man aus der Vergangenheit.

, wobei:

$$c_0 = \frac{1}{b_0} \quad , \quad c_1 = -\frac{a_1}{b_0} \quad , \quad c_2 = -\frac{a_2}{b_0} \quad , \quad \dots \quad , \quad c_n = -\frac{a_n}{b_0}$$

Zugehörige Differenzgleichung:

$$x(k) = b_0 \cdot y(k) + a_1 \cdot y(k - 1) + a_2 \cdot y(k - 2) + \dots + a_n \cdot y(k - n)$$

Allgemein gilt für ein IIR Filter n-ter Ordnung:

$$F(z) = d_0 + d_1 \cdot z^{-1} + \dots + d_m \cdot z^{-m}$$

Formel 7.2—8

, wobei:

$$d_0 = b_0 \quad , \quad d_1 = b_1 \quad , \quad d_2 = b_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad d_m = b_m$$

Zugehörige Differenzgleichung:

$$x(k) = b_0 \cdot y(k) + b_1 \cdot y(k - 1) + b_2 \cdot y(k - 2) + \dots + b_m \cdot y(k - m)$$

Allgemeine Übertragungsfunktion:

$$F(z) = \frac{d_0 + d_1 \cdot z^{-1} + \dots + d_m \cdot z^{-m}}{c_0 + c_1 \cdot z^{-1} + \dots + c_n \cdot z^{-n}} = \frac{\frac{d_0}{c_0} + \frac{d_1}{c_0} \cdot z^{-1} + \dots + \frac{d_m}{c_0} \cdot z^{-m}}{1 + \frac{c_1}{c_0} \cdot z^{-1} + \dots + \frac{c_n}{c_0} \cdot z^{-n}}$$

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{-\frac{a_1}{b_1}}{\frac{1}{b_0}} = -a_1, \quad \frac{c_2}{c_0} = \frac{-\frac{a_2}{b_1}}{\frac{1}{b_0}} = -a_2, \quad \dots$$

$$\frac{d_0}{c_0} = b_0, \quad \frac{d_0}{c_0} = b_0, \quad \dots$$

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_m \cdot z^{-m}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - \dots - a_n \cdot z^{-n}}$$

Sonderfall FIR:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 \dots c_n = 0$$

$$\Rightarrow b_0 = d_0, b_1 = d_1, \dots, b_m = d_m$$

$$F(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_m \cdot z^{-m}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - \dots - a_n \cdot z^{-n}}$$

$$\Rightarrow X(z) \cdot (1 - a_1 \cdot z^{-1} - \dots - a_n \cdot z^{-n}) = Y(z) \cdot (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_m \cdot z^{-m})$$

$$x(k) - a_1 \cdot x(k-1) - a_2 \cdot x(k-2) = b_0 \cdot y(k) + b_1 \cdot y(k-1) + \dots + b_m \cdot y(k-m)$$

$$x(k) = b_0 \cdot y(k) + b_1 \cdot y(k-1) + \dots + b_m \cdot y(k-m) + a_1 \cdot x(k-1) + a_2 \cdot x(k-2)$$

Hantelsymbole:

x(t) ○ — ● X(s)

x(t) ○ — ■ X(z)

X(s) ● — ■ X(z)

Übersicht über die Transformationen:

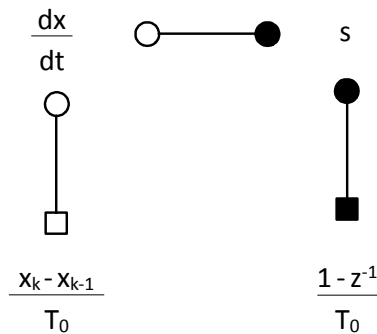
kontinuierlicher Zeitbereich

kontinuierlicher Frequenzbereich

DGL

F(s)

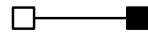
LaPlace Transformation



$$\frac{x_k - x_{k-1}}{T_0}$$

$$\frac{1 - z^{-1}}{T_0}$$

x_{k-1}



z⁻¹

Z Transformation

DFZGL

F(z)

diskreter Zeitbereich

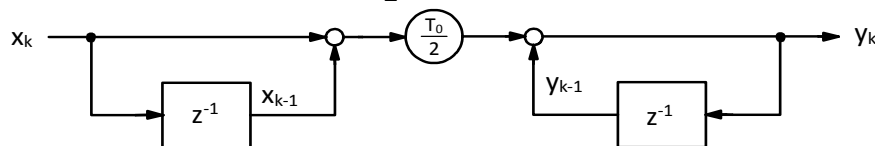
diskreter Frequenzbereich

Man erhält die Z-Übertragungsfunktion, indem man in der s Übertragungsfunktion

für $s, \frac{1-z^{-1}}{T_0}$ einsetzt. Dabei wurde für die Herleitung der Z-Transformation die Rechteckintegration zwischen den Abtastzeitpunkten 1 und k verwendet.

Auswirkungen der Trapezintegration:

$$y(k) = y(k-1) + T_0 \cdot \frac{x(k) - x(k-1)}{2}$$



$$F(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{T_0}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$s \bullet \blacksquare \frac{T_0}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Formel 7.2-9

Liefere die beiden Übertragungsfunktionen für $T_0 \Rightarrow 0$ dasselbe Ergebnis?

Rechteck:

$$s \bullet \blacksquare \frac{1}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z} = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{e^{T_0 \cdot s} - 1}{e^{T_0 \cdot s}}$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_0} \cdot \frac{e^{T_0 \cdot s} - 1}{e^{T_0 \cdot s}} \right) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{d}{dT_0} e^{T_0 \cdot s} - 1}{\frac{d}{dT_0} T_0 \cdot e^{T_0 \cdot s}} \right) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{s \cdot e^{T_0 \cdot s}}{1 \cdot e^{T_0 \cdot s} + T_0 \cdot e^{T_0 \cdot s} \cdot s} \right) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{1 + T_0 \cdot s} \right) = s$$

Bei unendlich schneller Abtastung verhält sich das digitale System genauso wie das analoge.

$$s \bullet \blacksquare \frac{T_0}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T_0}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} = \frac{T_0}{2} \cdot \frac{e^{T_0 \cdot s} + 1}{e^{T_0 \cdot s} - 1}$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{T_0}{2} \cdot \frac{e^{T_0 \cdot s} + 1}{e^{T_0 \cdot s} - 1} \right) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot s \cdot e^{T_0 \cdot s}}{1 \cdot T_0 \cdot e^{T_0 \cdot s} \cdot s \cdot (1 + e^{T_0 \cdot s})} \right) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot s \cdot e^{T_0 \cdot s}}{1 + e^{T_0 \cdot s} \cdot (1 + T_0 \cdot s)} \right) = s$$

$$s \quad \frac{2}{T_0} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Formel 7.2-10

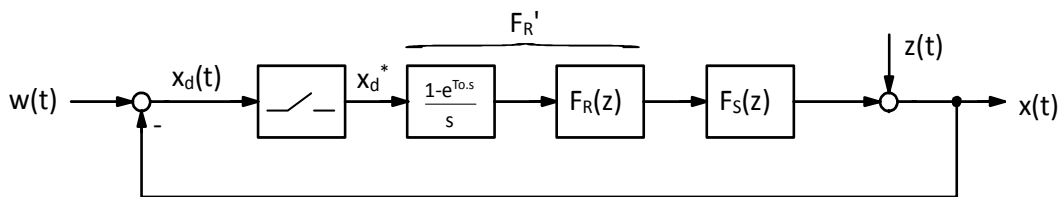
Integrator:

$$F(z) = \frac{T_0}{2} \cdot (1+z^{-1}) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = T_0 \cdot (1+z^{-1}) \cdot \frac{1}{2 \cdot (1-z^{-1})}$$

FIR Filter 1.
Rechteck-
Ordnung
integrator

Die Trapezintegration lässt sich als normale Rechteckintegration darstellen, bei der das Signal zusätzlich über ein FIR Filter 1. Ordnung geglättet wird. Daher darf bei der Z-Transformation nur die Rechteckintegration verwendet werden. a alle anderen Integrationsarten zusätzliche Annahmen betreffen, die nicht im System enthalten sind.

7.2.2 Beschreibung des Regelkreises mittels Z-Transformation



$$F(z) = \frac{F'_R(z) \cdot \mathcal{Z}\{F_S(s)\}}{1 + F'_R(z) \cdot \mathcal{Z}\{F_S(s)\}}$$

$$\frac{1 - e^{-T_0 \cdot s}}{s} \bullet \blacksquare T_0 \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Damit kann der Reglerentwurf genauso wie bei kontinuierlichen System durchgeführt werden.

(1). Stabilität:

Stabilität kann wiederum mit denselben Kriterien ermittelt werden, wie bei kontinuierlichen Systemen, z.B. mit der charakteristischen Gleichung.

$Z(s) + N(s) = 0 \Rightarrow$ stabil, wenn alle $|Z_i| < 1$ sind, wenn alle Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.

Nachteil: Dies ist mit mehr Rechenaufwand verbunden, als bei den s-Übertragungsfunktionen.

(2). Regelgüte:

Die Regelgüte kann wiederum an Hand der Sprungfunktion ermittelt werden. Dazu muss die Z-Übertragungsfunktion wieder in die Differenzengleichung umgerechnet werden, welche wiederum numerisch ausgewertet werden kann.

7.3 Weitere Reglertypen

7.3.1 Kompensationsregler

Die Idee des Kompensationsreglers besteht darin, als Reglerübertragungsfunktion die inverse Streckenübertragungsfunktion anzusetzen.

$$F_R = \frac{1}{F_S}$$

Führungsfrequenzgang:

$$F_W = \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S} = \frac{F_R \cdot \frac{1}{F_R}}{1 + F_R \cdot \frac{1}{F_R}} = \frac{1}{2}$$

Verdoppelt man die Stellgröße, so erhält man den idealen Frequenzgang, was aber bedeuten würde, dass die Strecke unendlich schnell auf Änderungen reagiert.

Dies ist in der Praxis nicht möglich, weil kein F_R realisiert werden kann, das exakt der inversen Streckenfunktion entspricht.

Störfrequenzgang:

$$F_Z = \frac{F_S}{1 + F_R \cdot F_S} = \frac{F_S}{2}$$

Kompensationsregler reduzieren Störungen nur auf die Hälfte. Daher ist der Kompensationsregler bei Regelkreisen in denen nur geringe Störgrößen auftreten gut einsetzbar.

Realisierbarkeit der Reglerübertragungsfunktion:

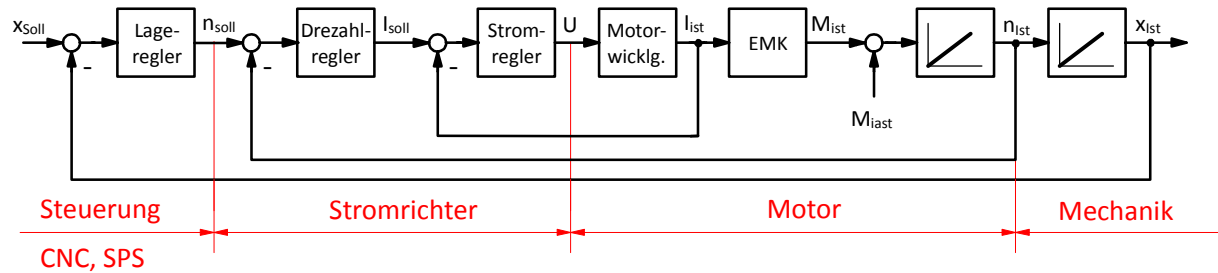
- Strecken ohne Ausgleich (I-Strecken):
 - D Regler => leicht realisierbar.
 - Störfrequenzgang Integral => nicht stabil und nicht brauchbar.
- PT₁ Strecken:
 - PD Regler => leicht realisierbar, Standardregler
 - Problem liegt bei der Realisierbarkeit des Differenzierers, da es diesen als ideales Element nicht gibt.
- PT_n Strecken, für n > 1:
 - Regler enthält n-fache Ableitungen => ist schwierig zu realisieren, da extrem hohe Werte auftreten.
 - Praktisch wird der Regler als FIR Struktur n-ter Ordnung realisiert.

7.3.2 Kaskadenregelung

Gibt es bei einem Regelkreis zur regelnden Größe auch Ursachen so kann eine höhere Regelgüte erreicht werden, wenn nicht nur die eigene Regelgröße geregelt wird, sondern auch deren Ursache.
Bsp.: Lageregelung

Motorstrom I (Drehmoment) \longrightarrow Drehzahl n \longrightarrow Position X

Dadurch ergeben sich bei der Kaskadenregelung mehrere Regelkreise, die ineinander verschachtelt sind.



Je weiter innen dich der Regler in der Kaskade befindet, desto schneller muss er reagieren, daher erfolgt die Digitalisierung der Regler im Laufe der Zeit von außen nach innen. Stromregler werden heute mit ca. $100\mu s$ getaktet.

Drive based automation:

Teile von Steuerungsaufgaben können vom Stromrichter übernommen werden, der vollständig auf Mikroprozessorbasis aufgebaut ist.

7.3.3 Zustandsregler

Die Idee des Zustandsreglers leitet sich aus der des Kaskadenreglers ab und zwar ist ein System dann optimal regelbar, wenn auf alle inneren Zustände ein Regler reagieren kann. Daher bezeichnet man jene Größen, die den inneren Zustand des Systems vollständig beschreiben als Zustandsgrößen (x_{ist} , n_{ist} , i_{ist})

Während bei der Kaskadenregelung einzelne Regler für die jeweiligen Größen vorhanden sind versucht man bei der Zustandsregelung einen Regler zu konstruieren, der auf alle Größen gleichzeitig reagiert (Parallelstruktur). Der Regler besitzt nun mehrere Soll bzw. Istwerteingänge, die ur jeweils einen Vektor zusammengefasst werden.